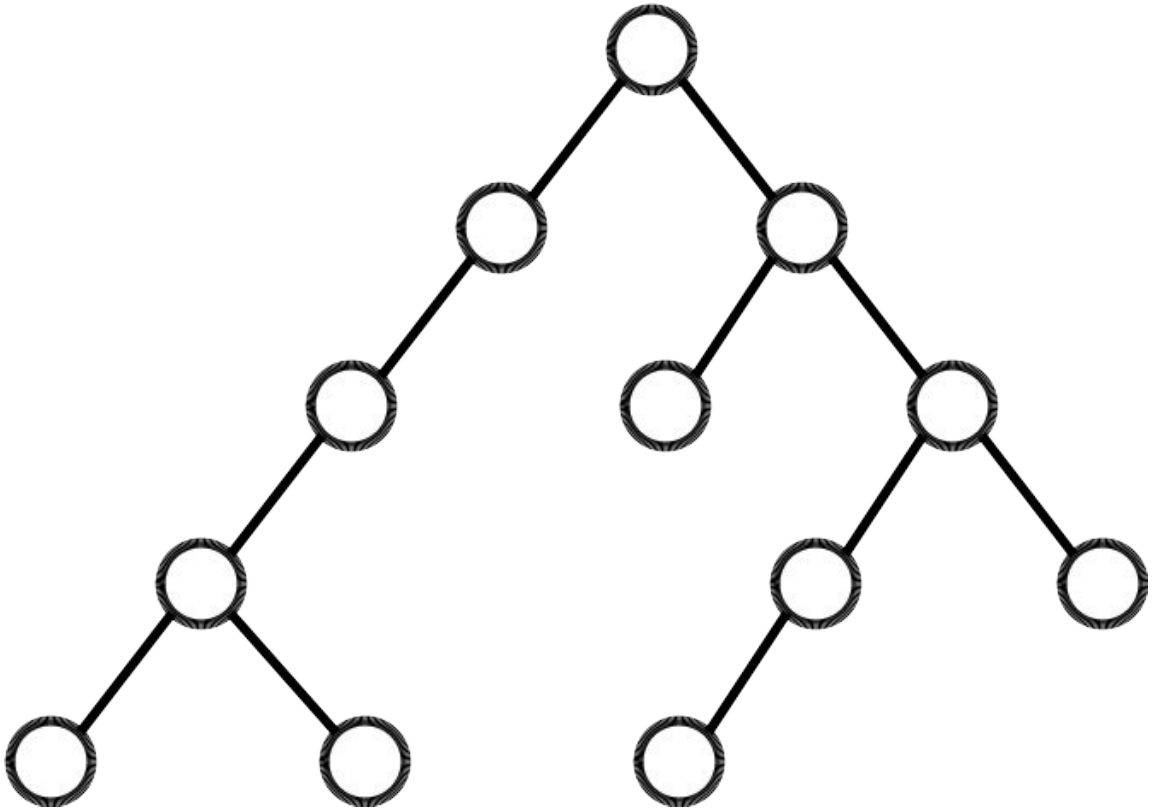
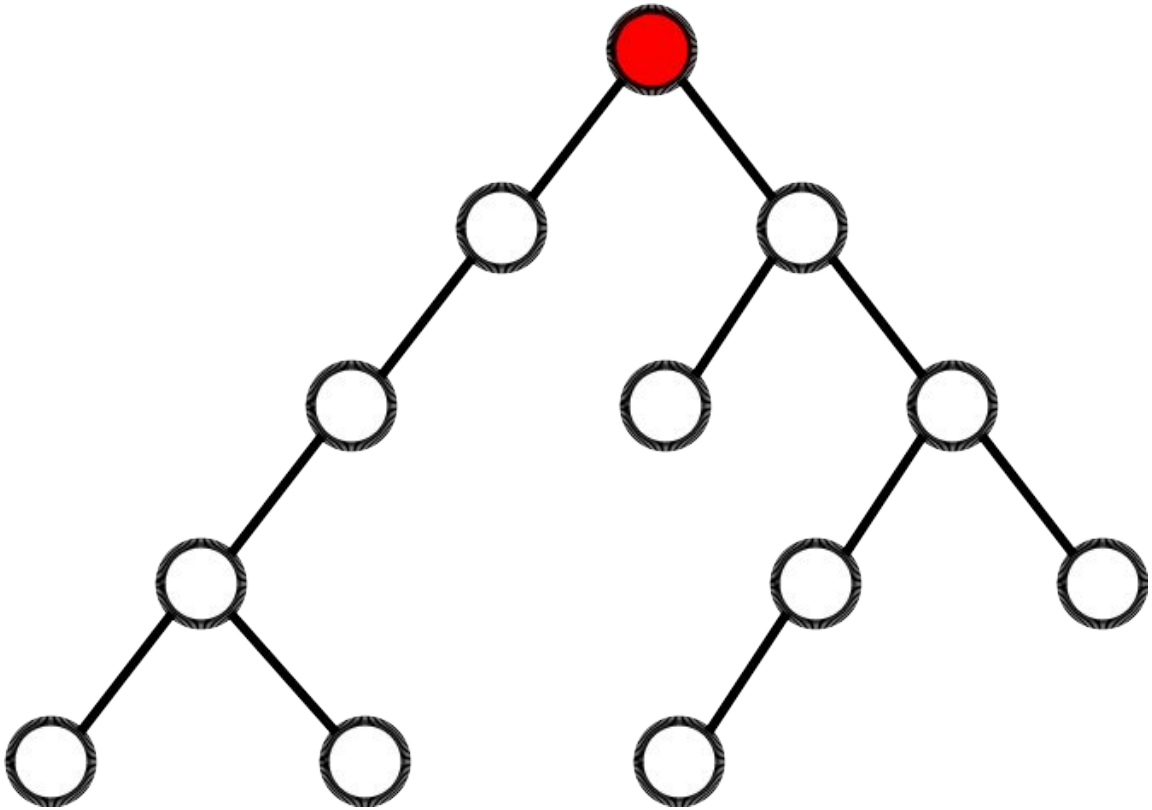
Árvores Binárias

Algoritmos e Estruturas de Dados 2
2017-1
Flavio Figueiredo (http://flaviovdf.github.io)

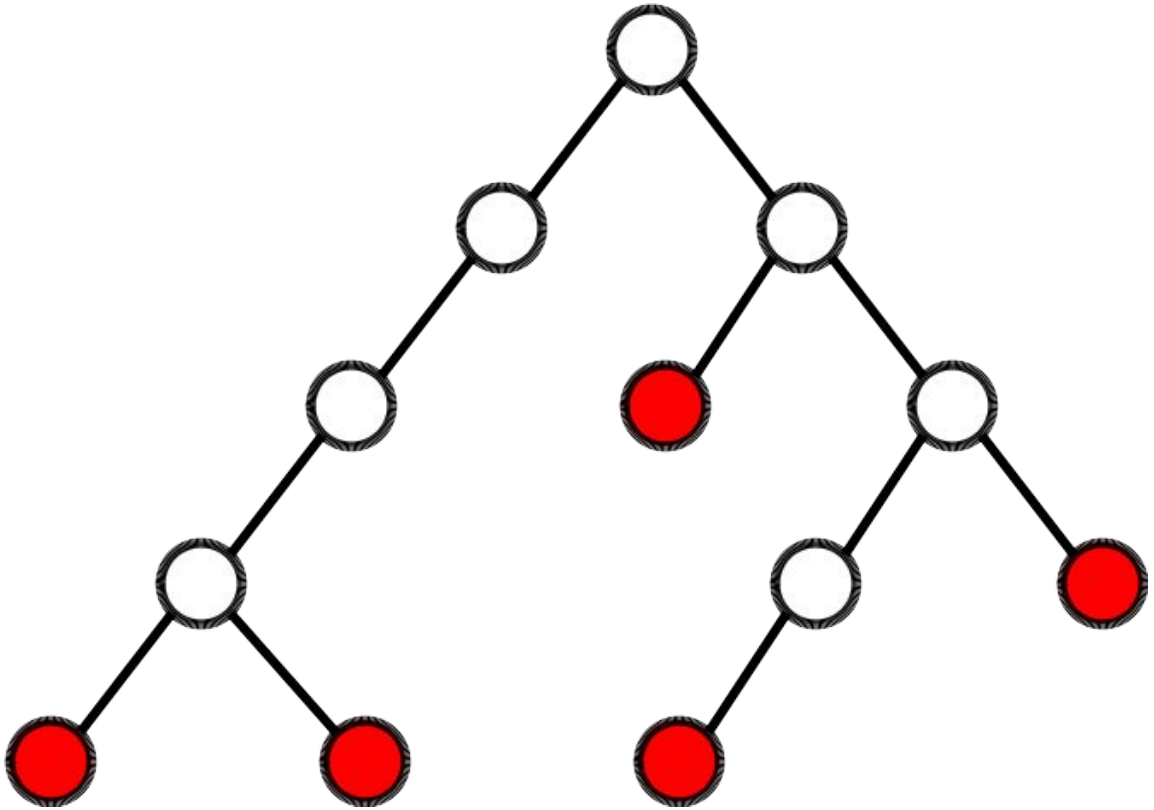
Árvores



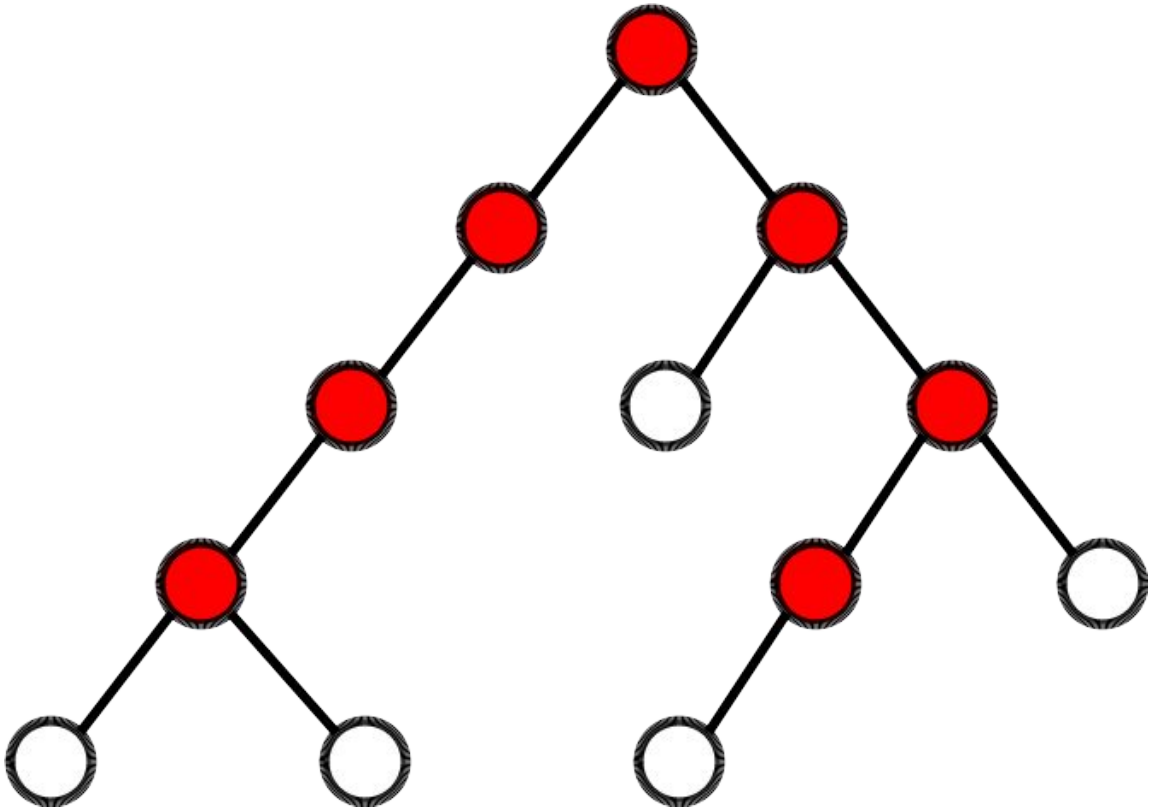
Raíz



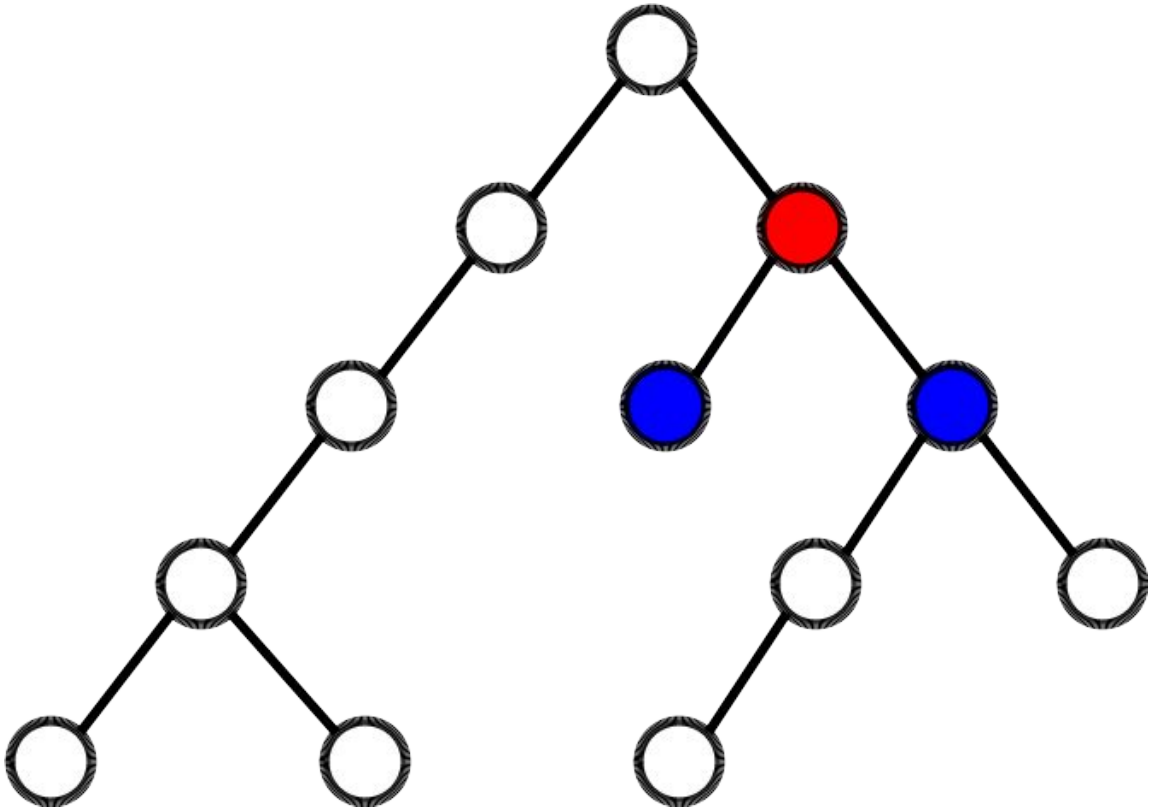
Folhas



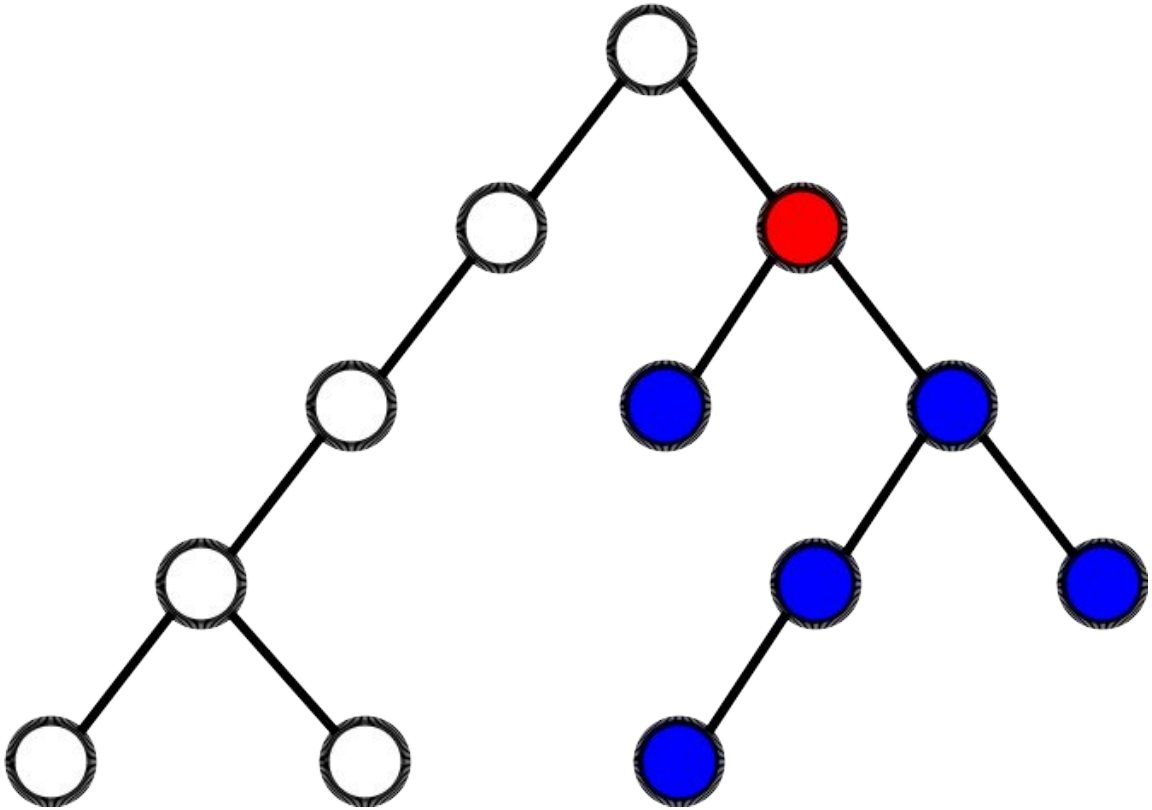
Nós Internos



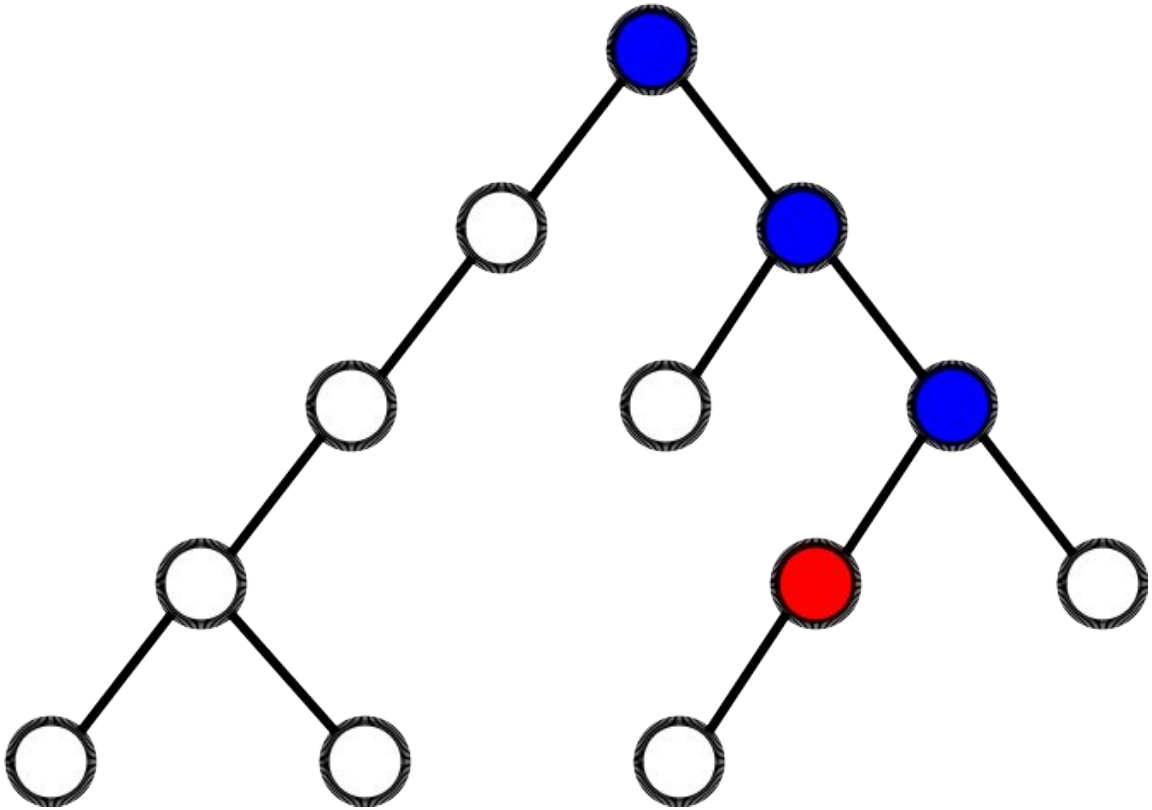
Pais e Filhos



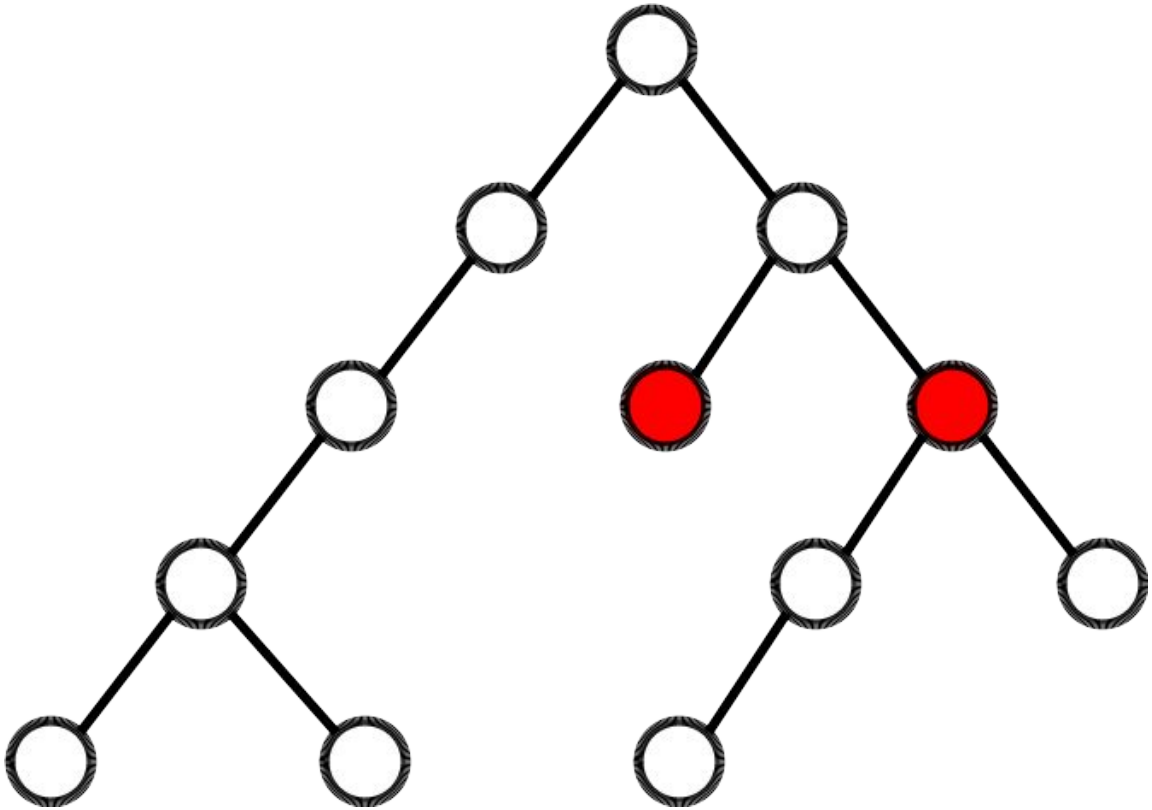
Descendentes



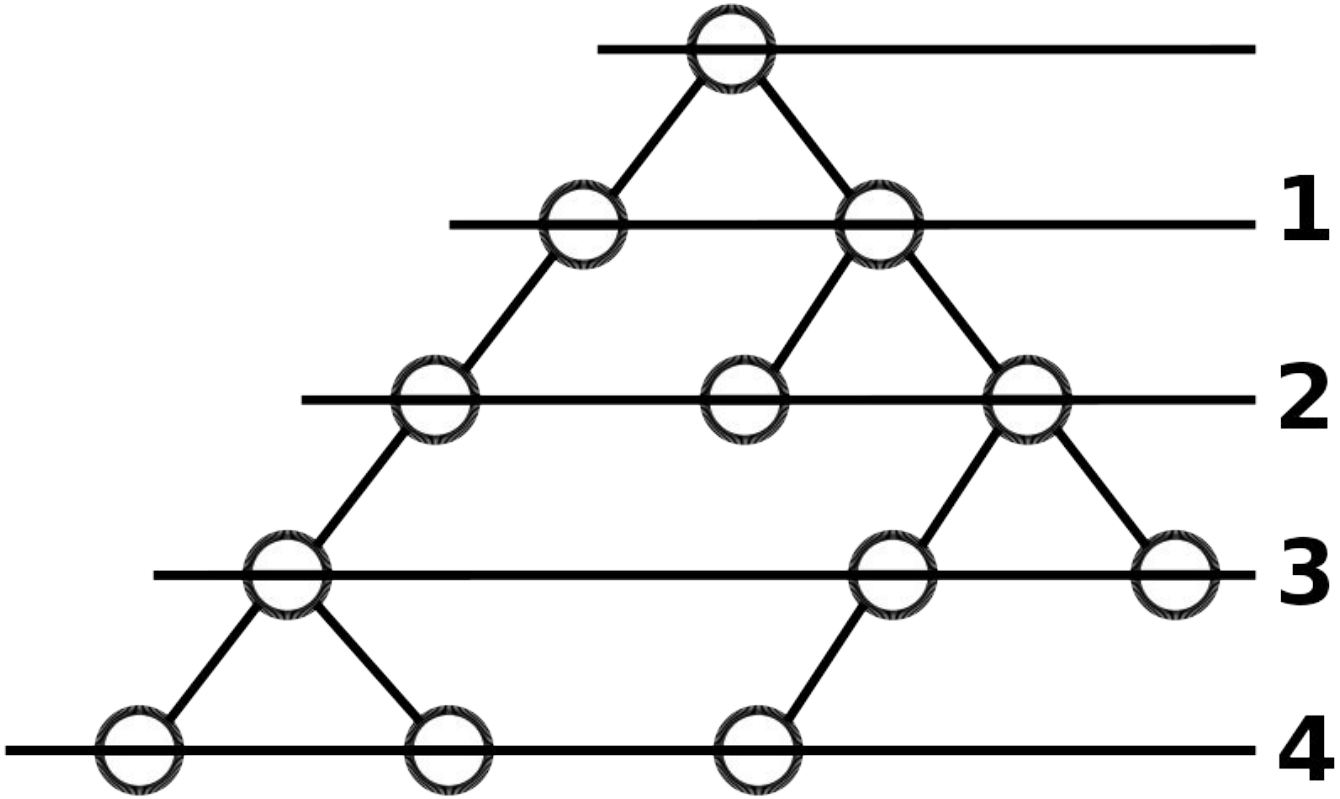
Ancestrais



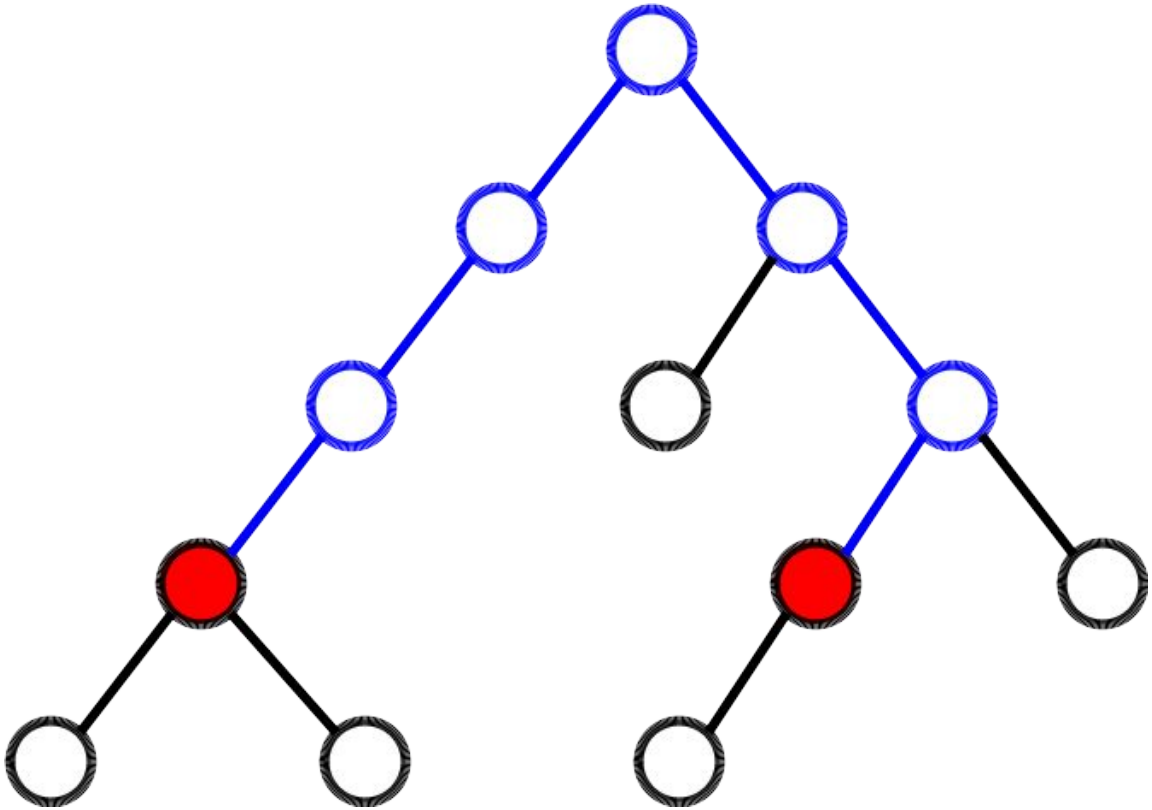
Irmãos



Níveis



Caminhos



Árvores

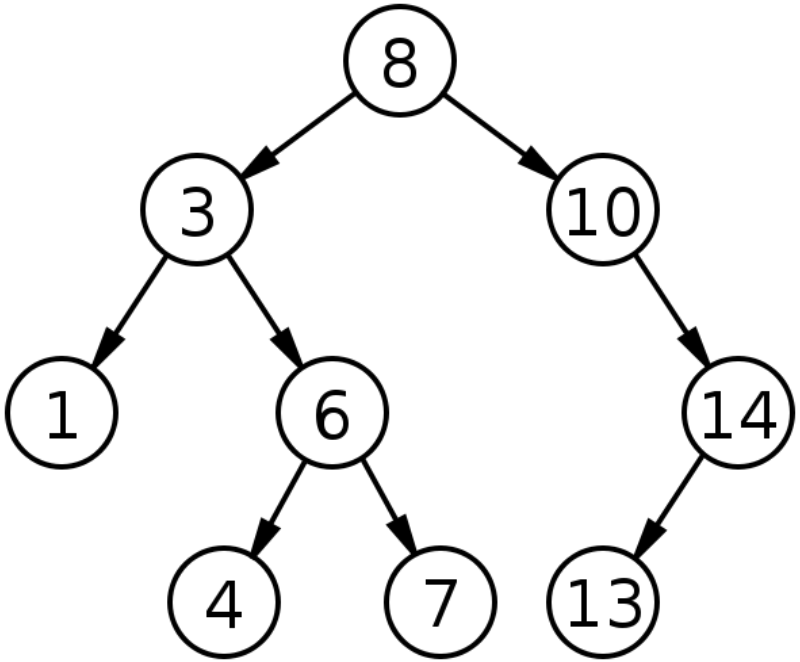
- Utilizadas para gerenciar hierarquias
- Bastante comuns na computação
- Árvore de Decisão
- Compactação
- Busca de prefixos
- Jogos

Propriedade Interessantes

- Todo nó representa uma sub-árvore
- Raiz é o nó
- Recursividade facilita nossa vida!

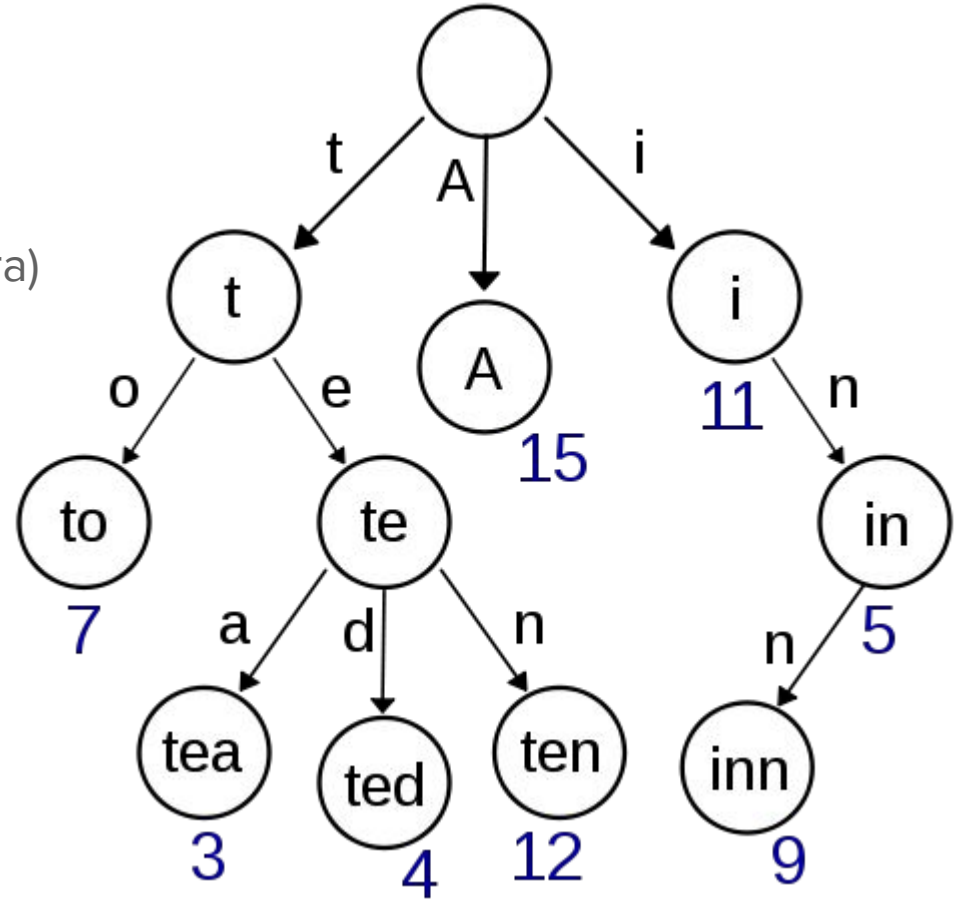
Árvore Binária

- Apenas 2 descendentes imediatos por nó



Árvore n-ária

- n >= 0 descendentes imediatos
- Exemplo: Trie (não veremos agora)



Árvore Binária de Pesquisa/Busca (Binary Search Tree - BST)

- Invariantes:
  - O filho da esquerda é menor ou igual ao nó
  - O filho da direita é maior do que o nó

- Consequências:
  - Todo elemento na esquerda é menor do que o nó
  - Todo elemento na direita é maior do que o nó

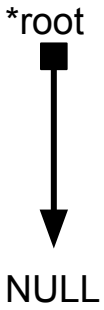
TAD

- Vamos focar mais nas funções destacadas
  - Inserir
  - Remover
  - Achar Elemento
- Criar e Free similar aos TADs anteriores
- Ver código
  - https://github.com/flaviovdf/AEDS2-2017-1/tree/master/exemplos/arvores

```
#ifndef BST_H
#define BST_H

typedef struct node {
  int value;
  struct node *leftChild;
  struct node *rightChild;
} node_t;

typedef struct {
  node_t *root;
} bst_t;

bst_t *createTree();
void insertValue(bst_t *tree, int value);
int hasValue(bst_t *tree, int value);
int removeValue(bst_t *tree, int value);
void bstFree(bst_t *tree);
#endif
```

Iniciando a Árvore

```
bst_t                  *createTree()                  {
    bst_t  *tree  =  (bst_t  *)  malloc(sizeof(bst_t));
             if       (tree       ==       NULL)      {
        printf("Malloc  error!  Cannot  create  tree");
                                                exit(1);
                                                       }
                  tree->root           =           NULL;
                           return                  tree;
}
```



Como Encontrar um Elemento x?

Iniciando de um nó raiz (node)

1. `node->value == x?`
    - Achamos o nó!
2. `node->value < x?`
    - Passo para a esquerda
3. `node->value > x?`
    - Passo para a direita

Como Encontrar um Elemento x?

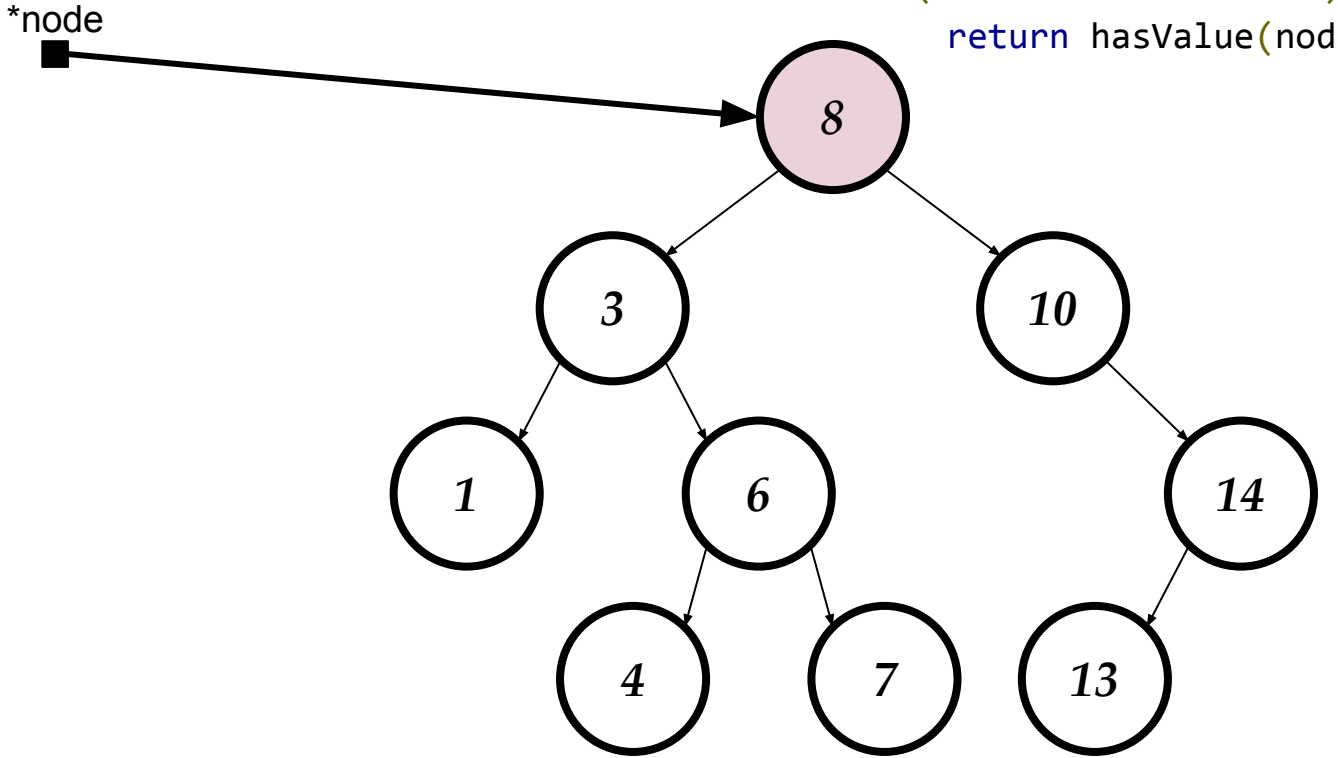
Iniciando de um nó raiz (node)

1. node->value == x?
   - Achamos o nó!
2. node->value < x?
   - Passo para a esquerda
3. node->value > x?
   - Passo para a direita

```
int hasValue(node_t *node, int value) {
  if (node == NULL)
     return 0;
  if (value == node->value)
     return 1;

  if (value < node->value) {
     return hasValue(node->leftChild, value);
  } else {
     return hasValue(node->rightChild, value);
  }
}
```

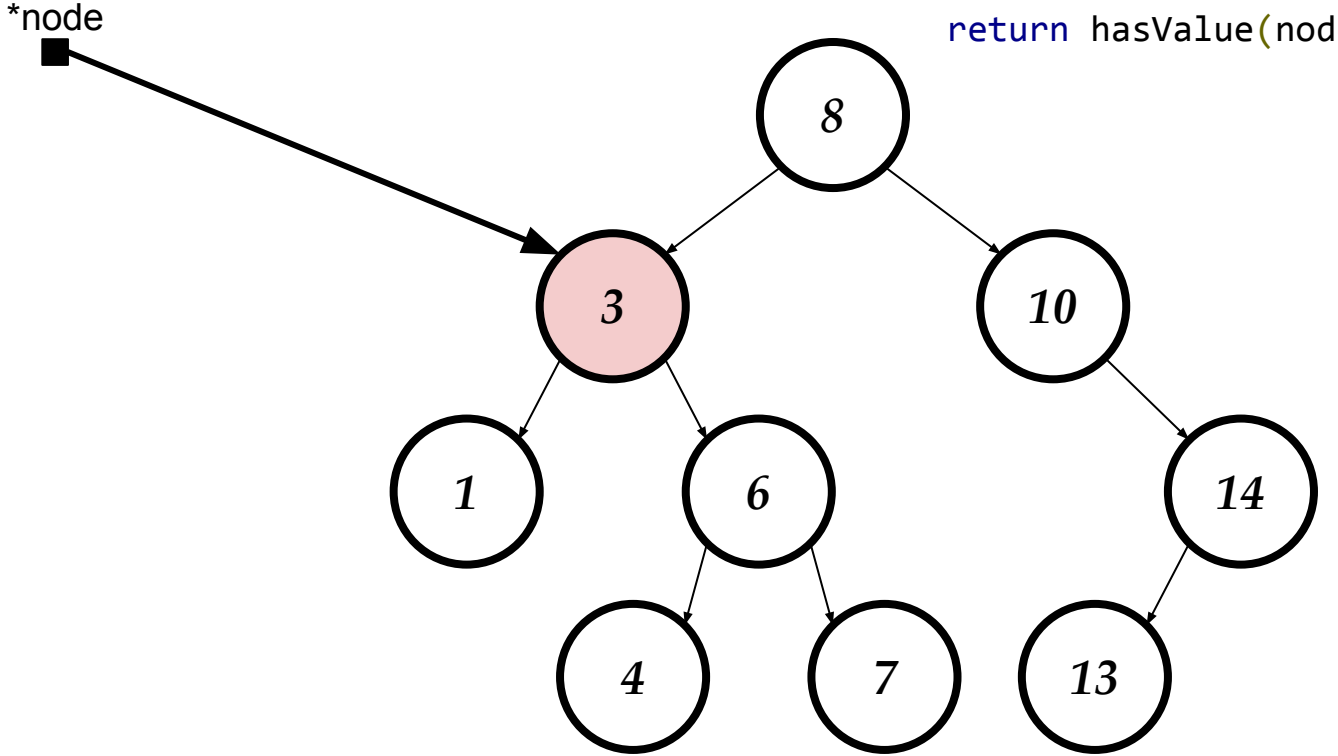
Como Encontrar um Elemento $x=4$?

```
if (value < node->value) {
  return hasValue(node->leftChild, value);
```

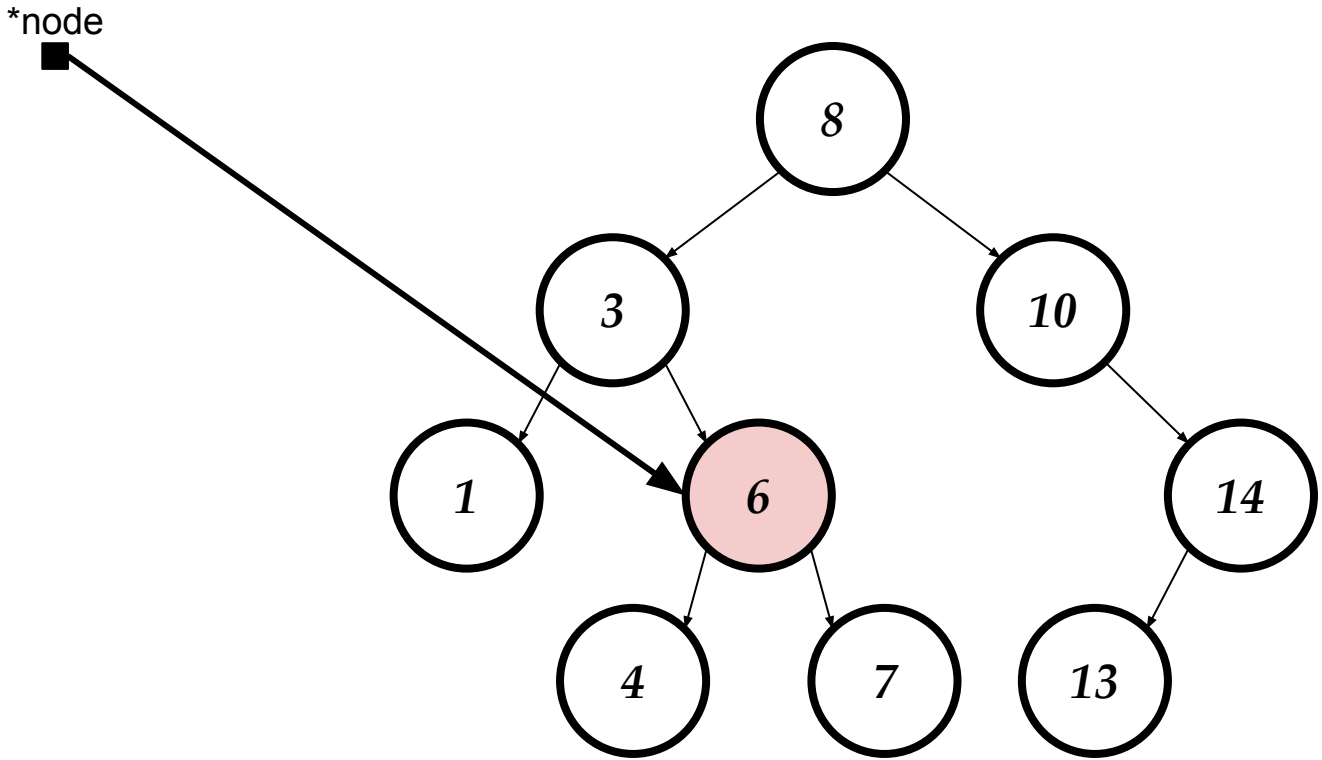


Como Encontrar um Elemento $x=4$?

```
else {
    return hasValue(node->rightChild, value);
```

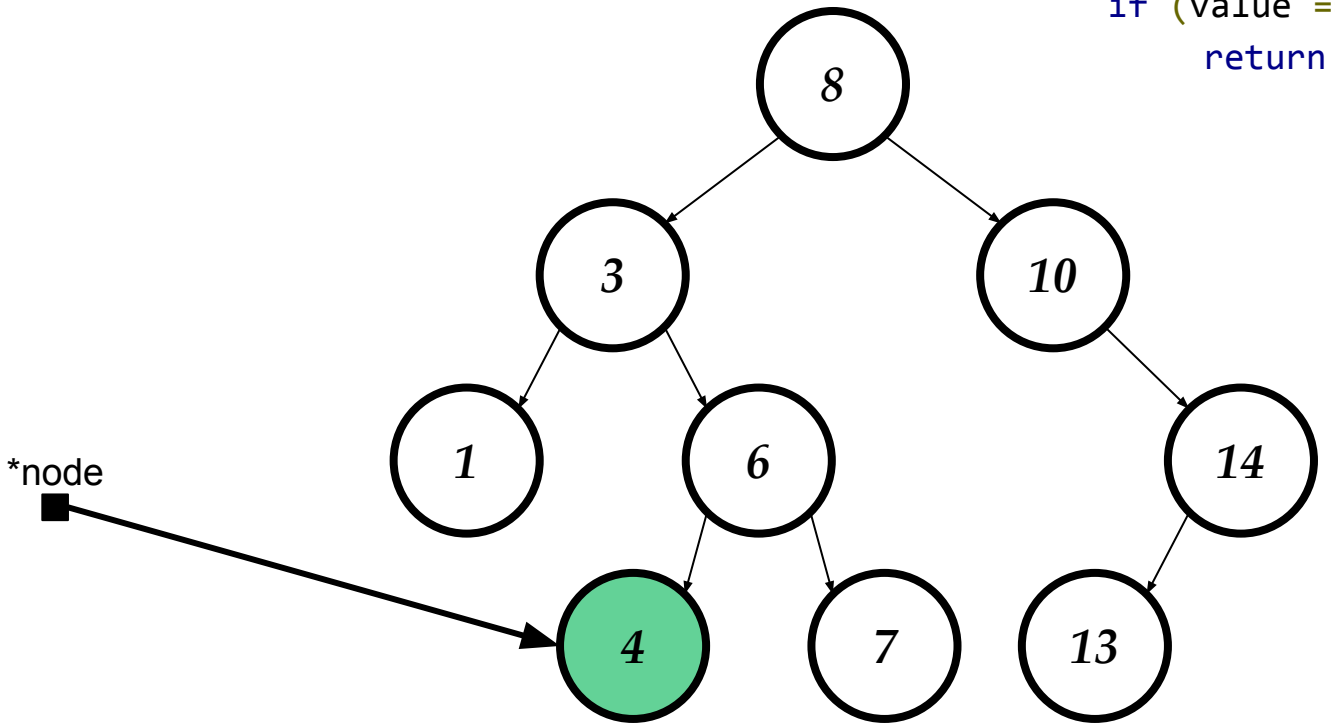


Como Encontrar um Elemento $x=4$?



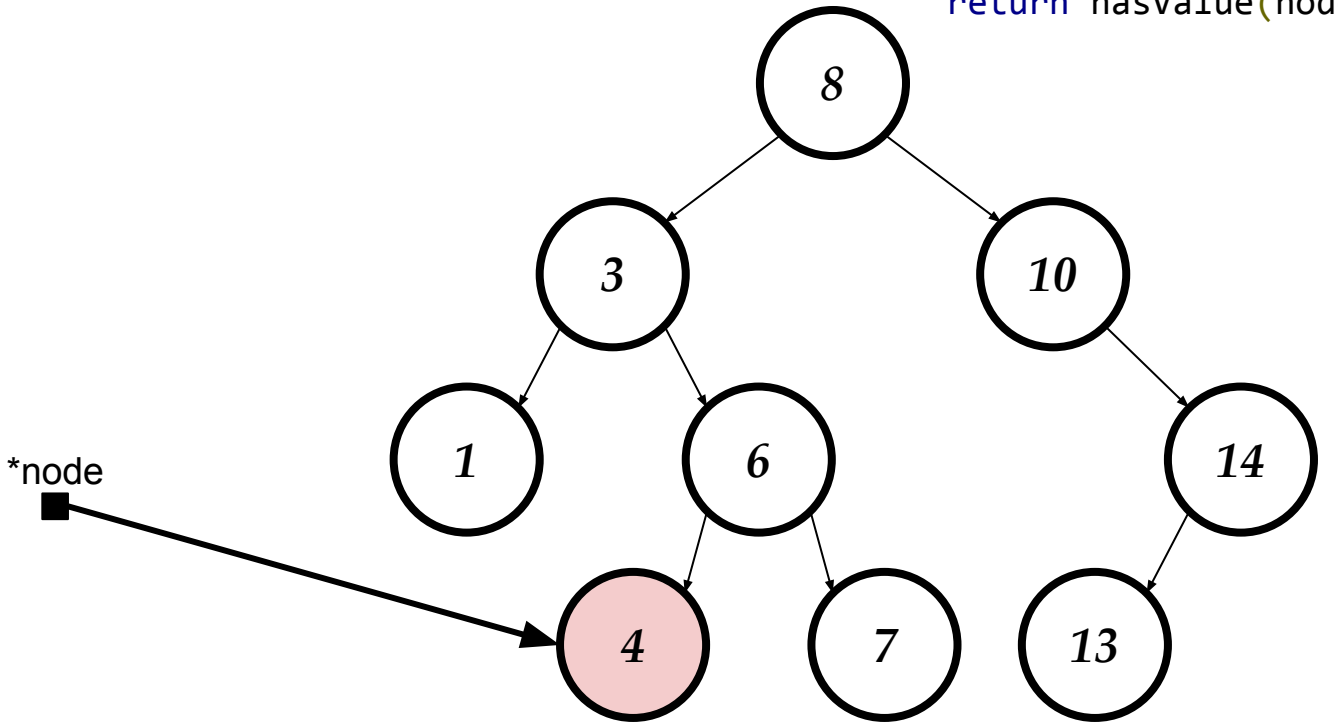
Como Encontrar um Elemento $x=4$?

```
if (value == node->value)
    return 1;
```



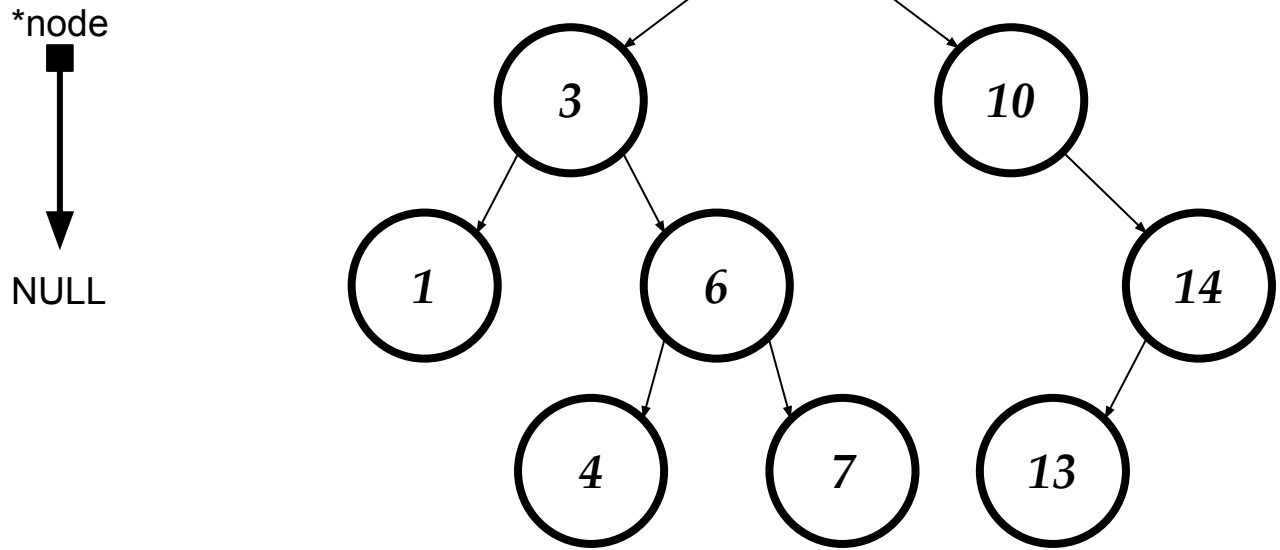
Caso não exista? $x=3.5$?

```
if (value < node->value) {
  return hasValue(node->leftChild, value);
```



Caso não exista? $x=3.5$?

```
if (node == NULL)
    return 0;
```



Encontrando nó

- A ideia acima é essencial para o resto das operações
- Como inserir o nó $x=12$?

Encontrando nó

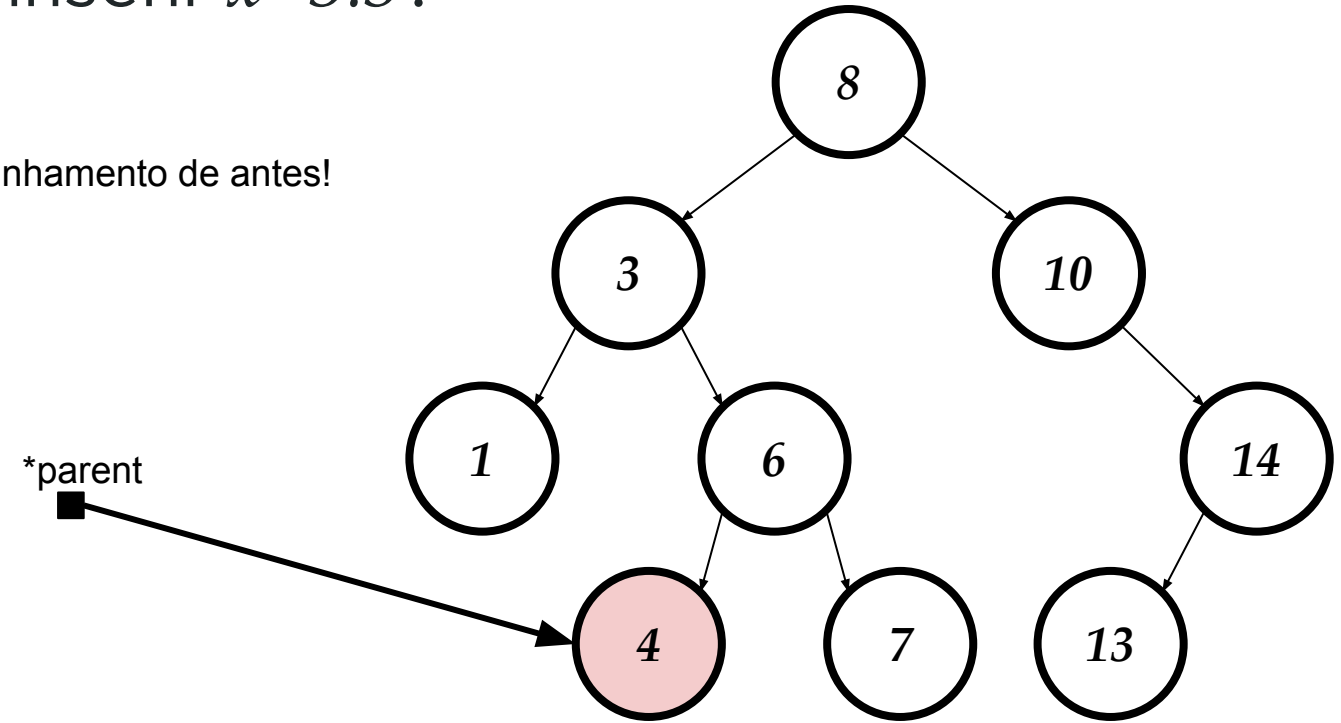
- A ideia acima é essencial para o resto das operações

- Como inserir o nó $x=3.5\ ou\ x=12$?

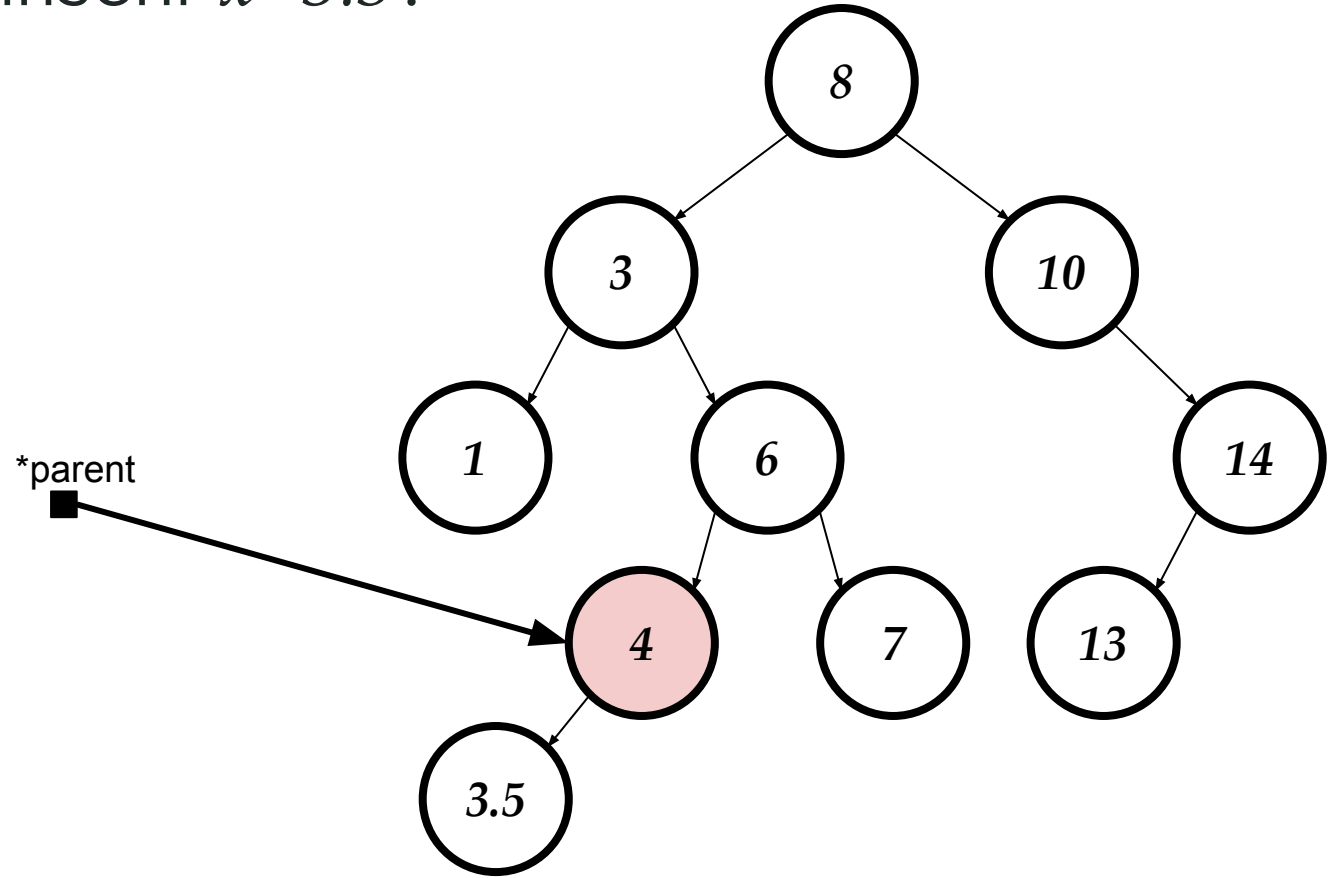
- Caminhar até o ascendente imediato (pai)
- Inserir

Como inserir x=3.5?

Mesmo caminhamento de antes!



Como inserir x=3.5?



Inserções

1. Assumindo que o nó já foi alocado corretamente
    a. Vocês já devem se acostumar com os mallocs

Inserções

1. Chamada já com novo nó alocado

```
void insertValueRecursive(node_t *parent, node_t *newNode) {
  //Caminha para esquerda
  if ((newNode->value <= parent->value)) {
    if (parent->leftChild == NULL) {
      parent->leftChild = newNode;
    } else {
      insertValueRecursive(parent->leftChild, newNode);
    }
  }

  //Caminha para direita
  if ((newNode->value > parent->value)) {
    if (parent->rightChild == NULL) {
      parent->rightChild = newNode;
    } else {
      insertValueRecursive(parent->rightChild, newNode);
    }
  }
}
```

Inserções

1. Chamada já com novo nó alocado

2. Insere nó caso encontramos NULL

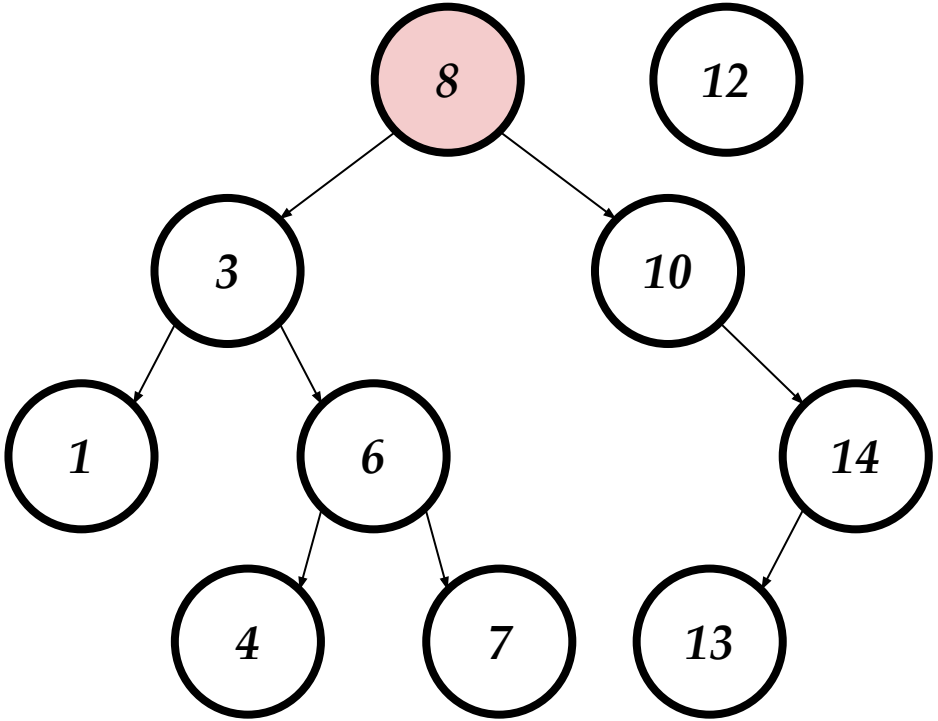
```
void insertValueRecursive(node_t *parent, node_t *newNode) {
  //Caminha para esquerda
  if ((newNode->value <= parent->value)) {
    if (parent->leftChild == NULL) {
      parent->leftChild = newNode;
    } else {
      insertValueRecursive(parent->leftChild, newNode);
    }
  }

  //Caminha para direita
  if ((newNode->value > parent->value)) {
    if (parent->rightChild == NULL) {
      parent->rightChild = newNode;
    } else {
      insertValueRecursive(parent->rightChild, newNode);
    }
  }
}
```

Inserções

1. Chamada já com novo nó alocado
2. Insere nó caso encontramos NULL
3. Caminhamento

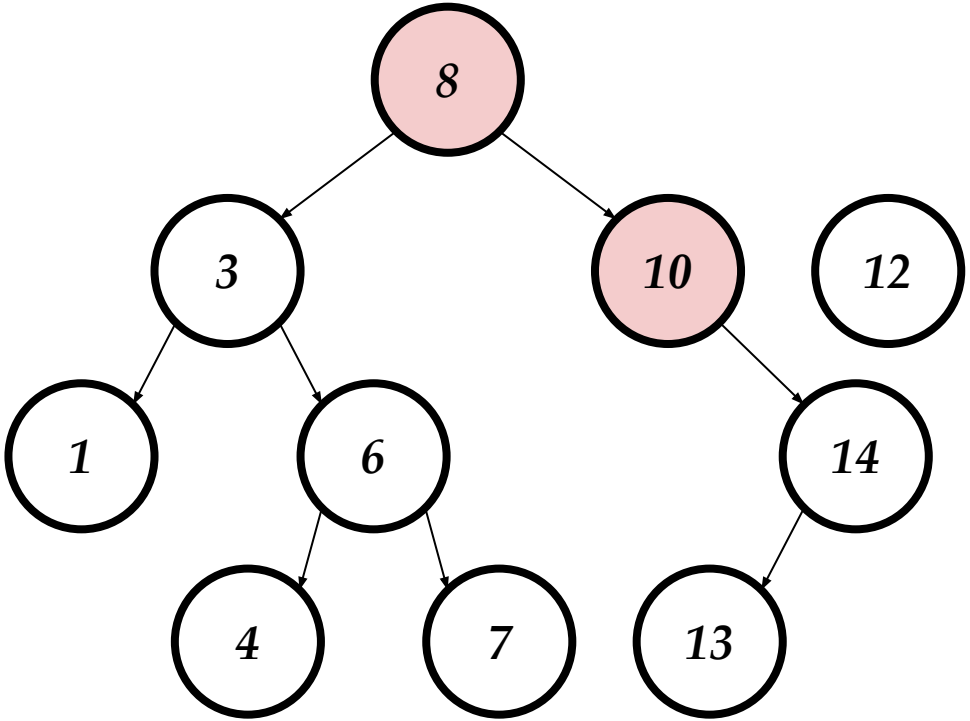
```
void insertValueRecursive(node_t *parent, node_t *newNode) {
  //Caminha para esquerda
  if ((newNode->value <= parent->value)) {
    if (parent->leftChild == NULL) {
      parent->leftChild = newNode;
    } else {
      insertValueRecursive(parent->leftChild, newNode);
    }
  }

  //Caminha para direita
  if ((newNode->value > parent->value)) {
    if (parent->rightChild == NULL) {
      parent->rightChild = newNode;
    } else {
      insertValueRecursive(parent->rightChild, newNode);
    }
  }
}
```

Maior -> Direita



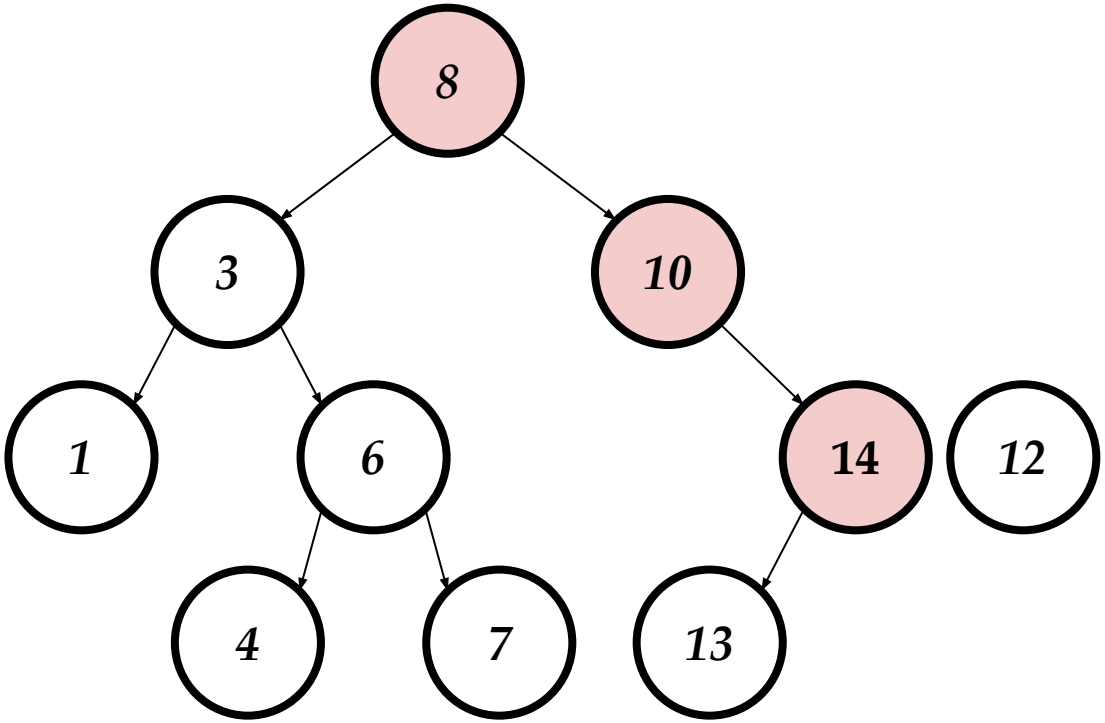

```
insert({3,NULL,NULL},{8,3,10})
```

Maior -> Direita



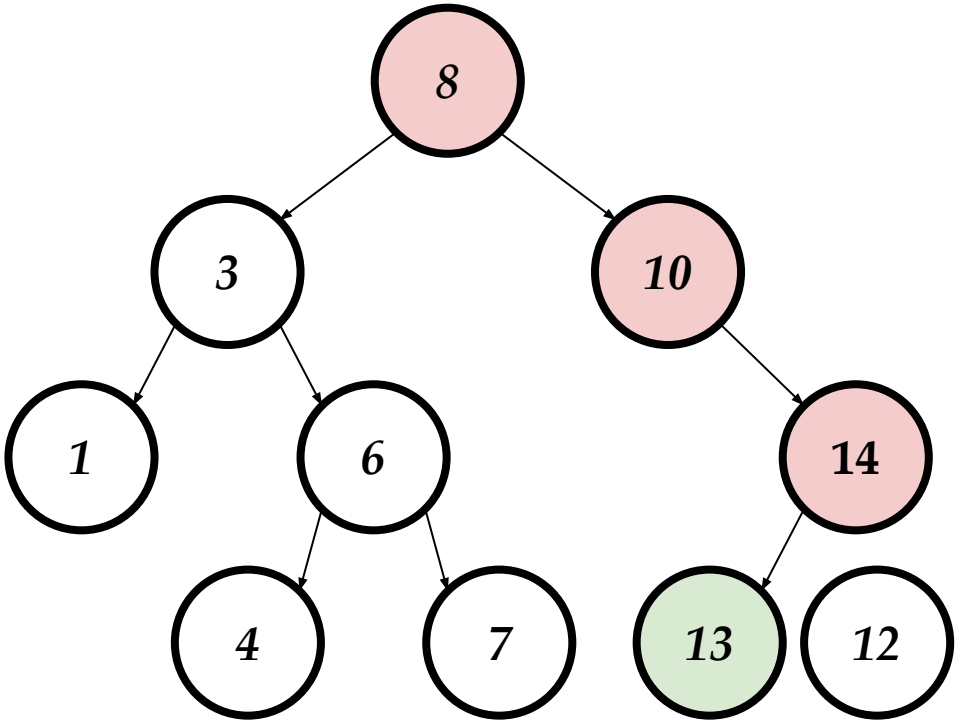
`insert({12,NULL,NULL},{10,NULL,14})`
`insert({12,NULL,NULL},{8,3,10})`
`insert(Node,Parent)`

Menor <- Esquerda



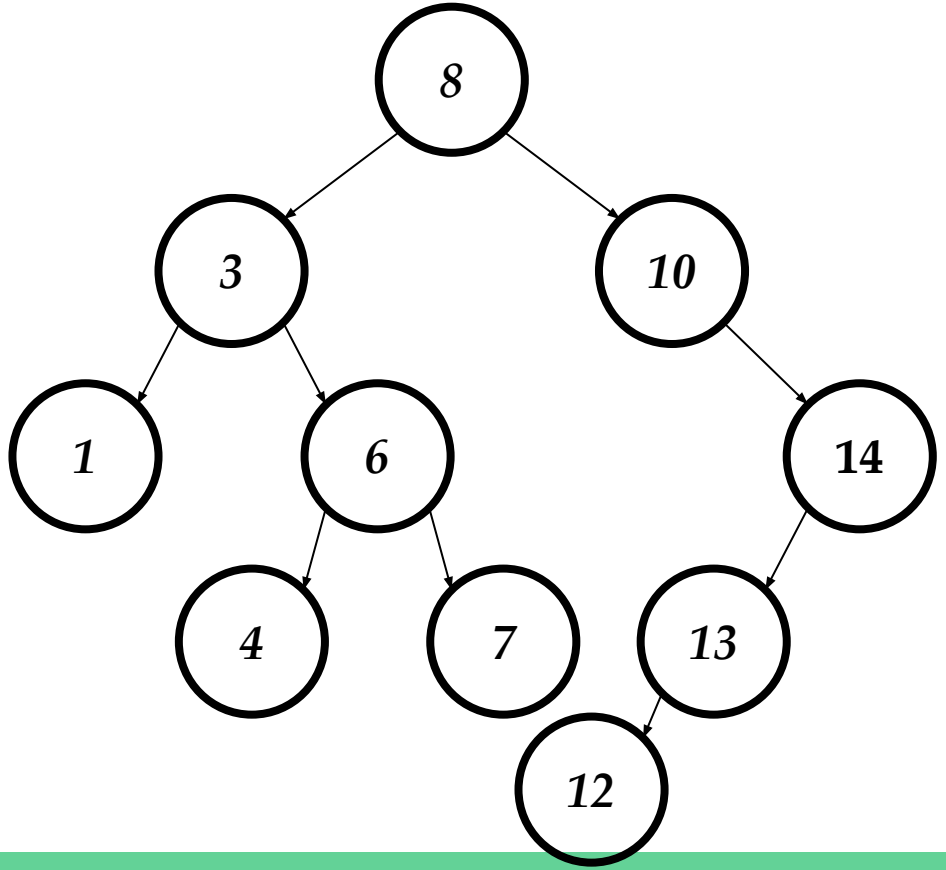

```
insert({12,NULL,NULL},{14,13,NULL})
insert({12,NULL,NULL},{10,NULL,14})
insert({12,NULL,NULL},{8,3,10})
insert(Node,Parent)
```

Menor <- Esquerda (NULL! Achamos o local)



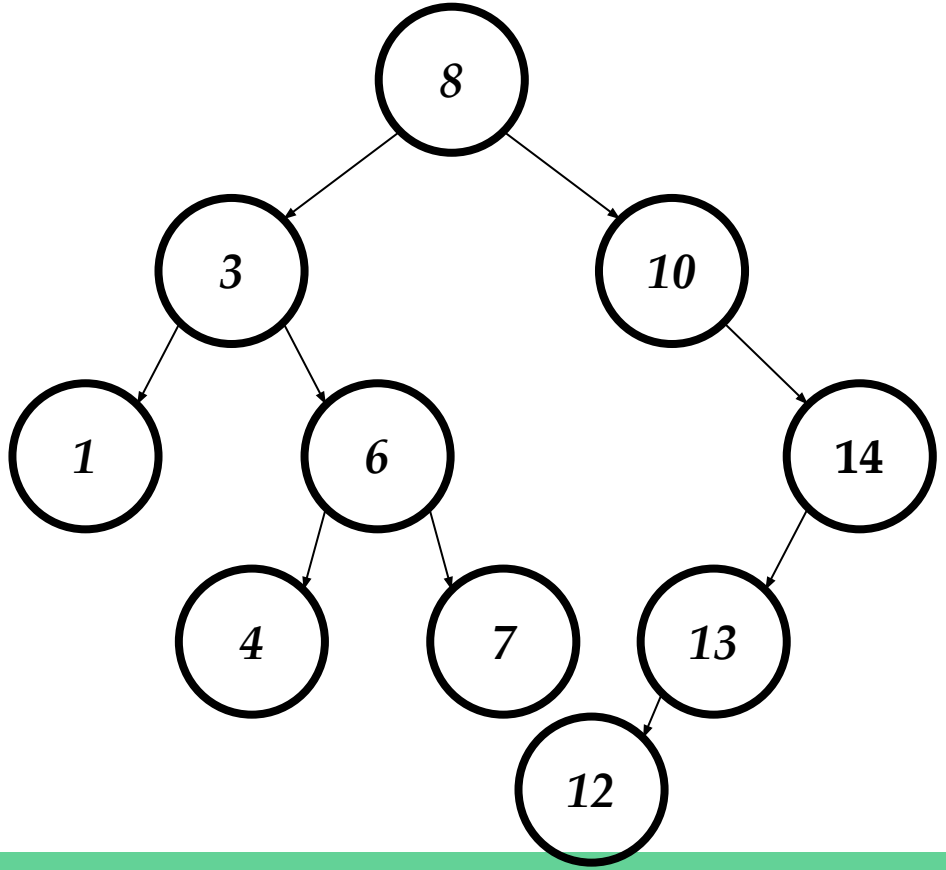
`insert({12,NULL,NULL},{13,NULL,NULL})`
`insert({12,NULL,NULL},{14,13,NULL})`
`insert({12,NULL,NULL},{10,NULL,14})`
`insert({12,NULL,NULL},{8,3,10})`
`insert(Node,Parent)`

Desempilha



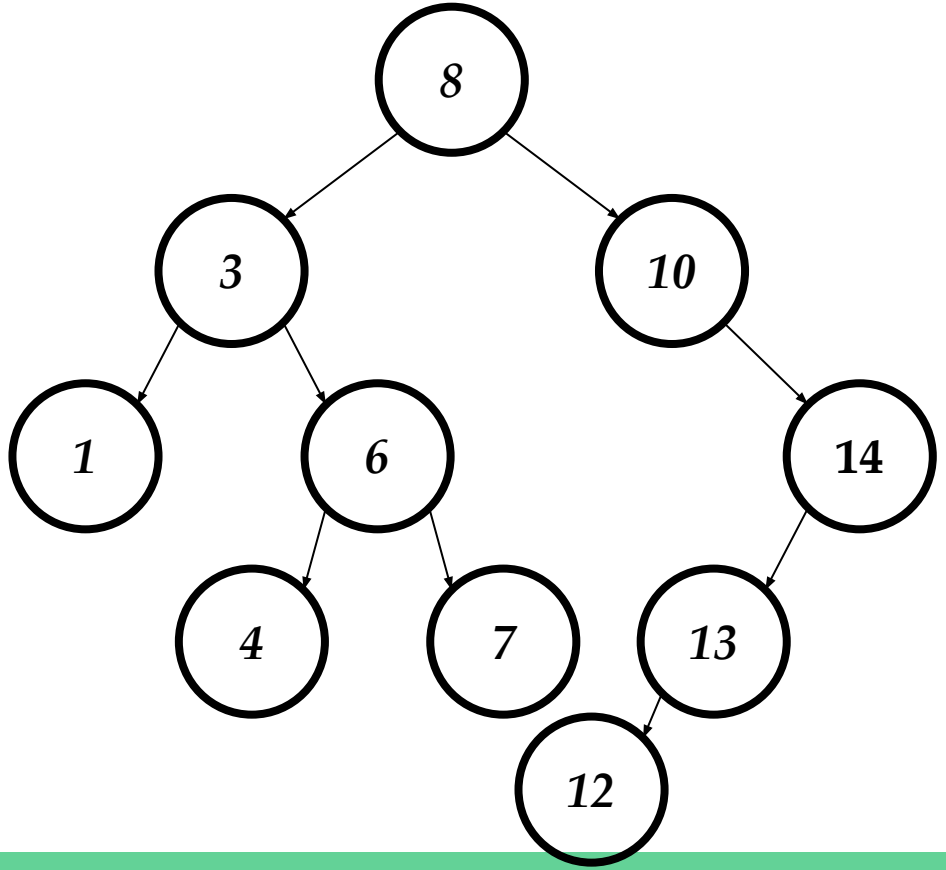
`insert({12,NULL,NULL},{13,NULL,NULL})`
`insert({12,NULL,NULL},{14,13,NULL})`
`insert({12,NULL,NULL},{10,NULL,14})`
`insert({12,NULL,NULL},{8,3,10})`
`insert(Node,Parent)`

Desempilha



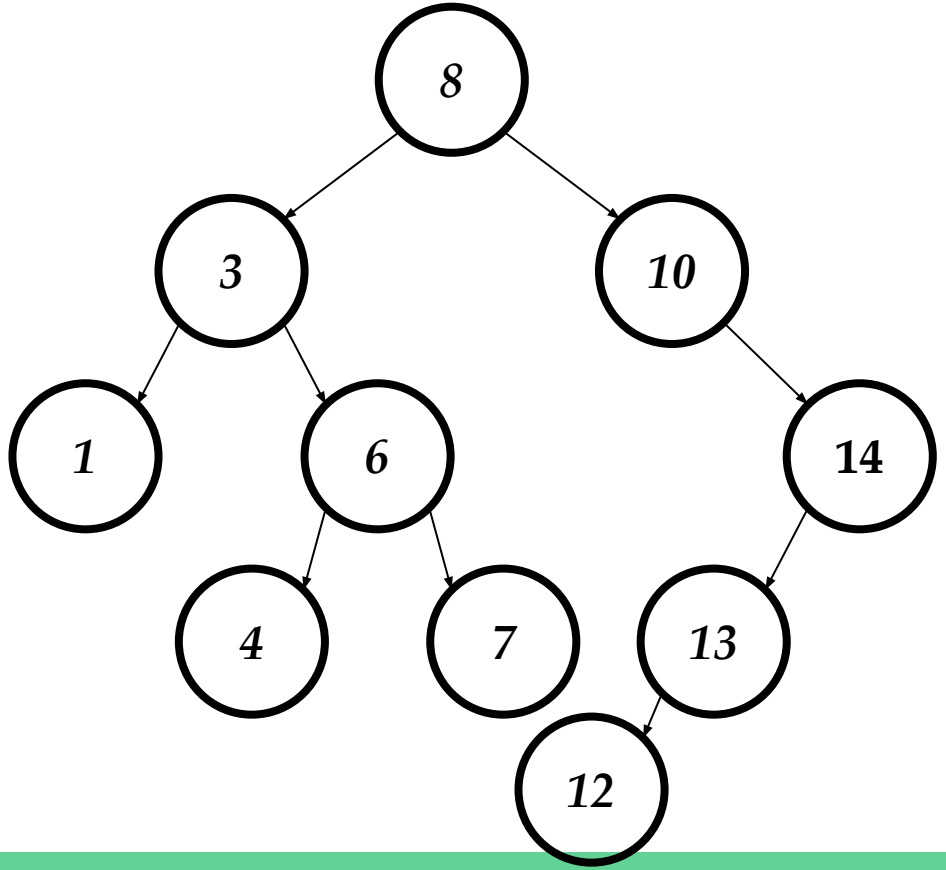
`insert({12,NULL,NULL},{14,13,NULL})`
`insert({12,NULL,NULL},{10,NULL,14})`
`insert({12,NULL,NULL},{8,3,10})`
`insert(Node,Parent)`

Desempilha



`insert({12,NULL,NULL},{10,NULL,14})`
`insert({12,NULL,NULL},{8,3,10})`
`insert(Node,Parent)`

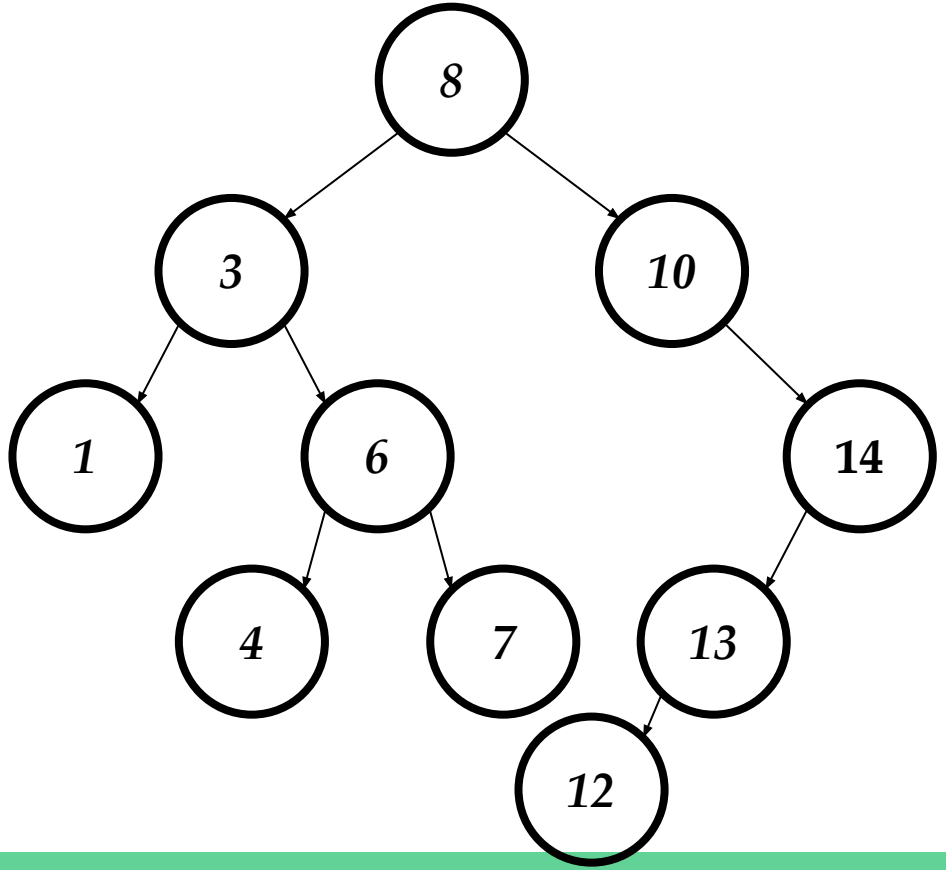
Desempilha




```
insert({12,NULL,NULL},{8,3,10})
```

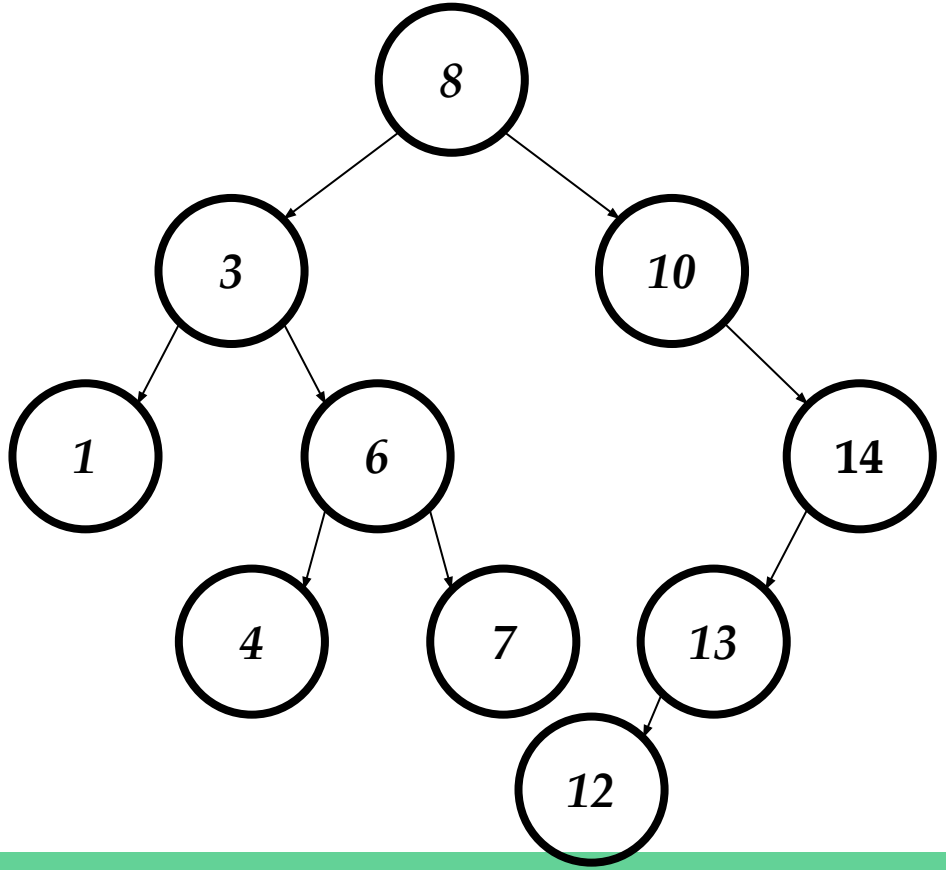
```
insert(Node,Parent)
```

Desempilha




```
insert(Node,Parent)
```

Desempilha



Recursão

- Como mencionar, árvores são “pratos cheio” para recusão

- Podemos fazer inserções sem recursão
  - Todo código recursivo pode ser feito iterativamente
  - Como?

- Ver exemplo no site
  - https://github.com/flaviovdf/AEDS2-2017-1/tree/master/exemplos/arvores

Remover Elementos

- Remoção na BST é mais complicado

- Precisamos considerar 3 casos:
  a. Quando o nó é folha

  b. Quando o nó tem apenas 1 descendente imediato

  c. Quando o nó tem 2 descendentes imediatos

Remover Elementos

- Remoção na BST é mais complicado

- Precisamos considerar 3 casos:
  a. Quando o nó é folha
     - Simples, free e atualizar ponteiros

  b. Quando o nó tem apenas 1 descendente imediato
     - Vamos deixar 1 sub-árvore órfã

  c. Quando o nó tem 2 descendentes imediatos
     - Vamos deixar 2 sub-árvore órfãs

Remover Elementos

- Remoção na BST é mais complicado

- Precisamos considerar 3 casos:
  a. Quando o nó é folha
     - Simples, free e atualizar ponteiros

  b. Quando o nó tem apenas 1 descendente imediato
     - Vamos deixar 1 sub-árvore órfã
     - Parente imediato pode herdar

  c. Quando o nó tem 2 descendentes imediatos
     - Vamos deixar 2 sub-árvore órfãs

Remover Elementos

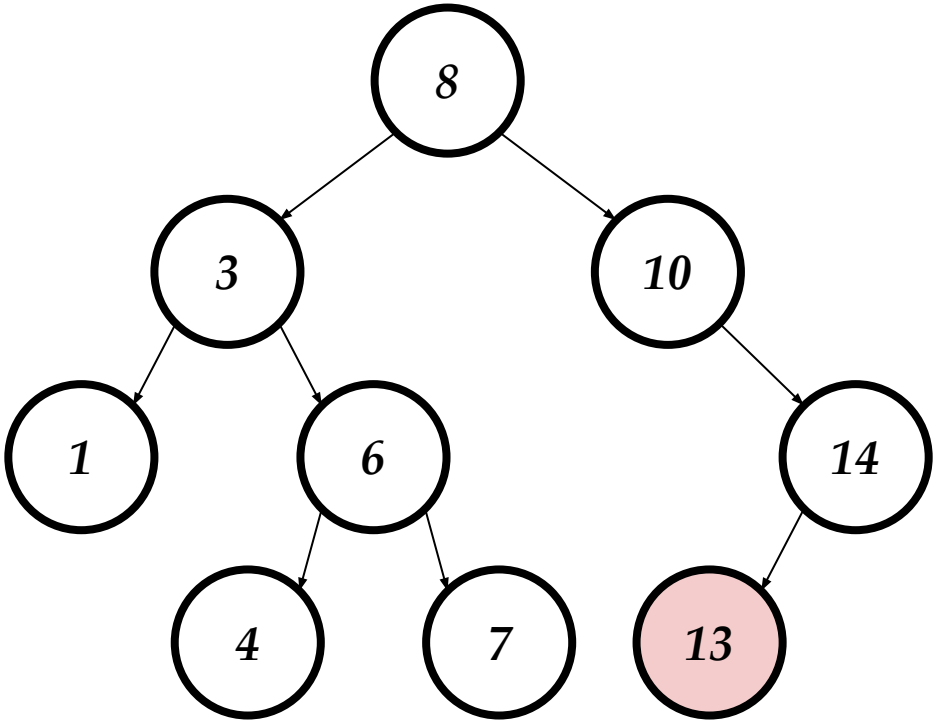
- Remoção na BST é mais complicado

- Precisamos considerar 3 casos:
  a. Quando o nó é folha
     - Simples, free e atualizar ponteiros

  b. Quando o nó tem apenas 1 descendente imediato
     - Vamos deixar 1 sub-árvore órfã
     - Parente imediato pode herdar

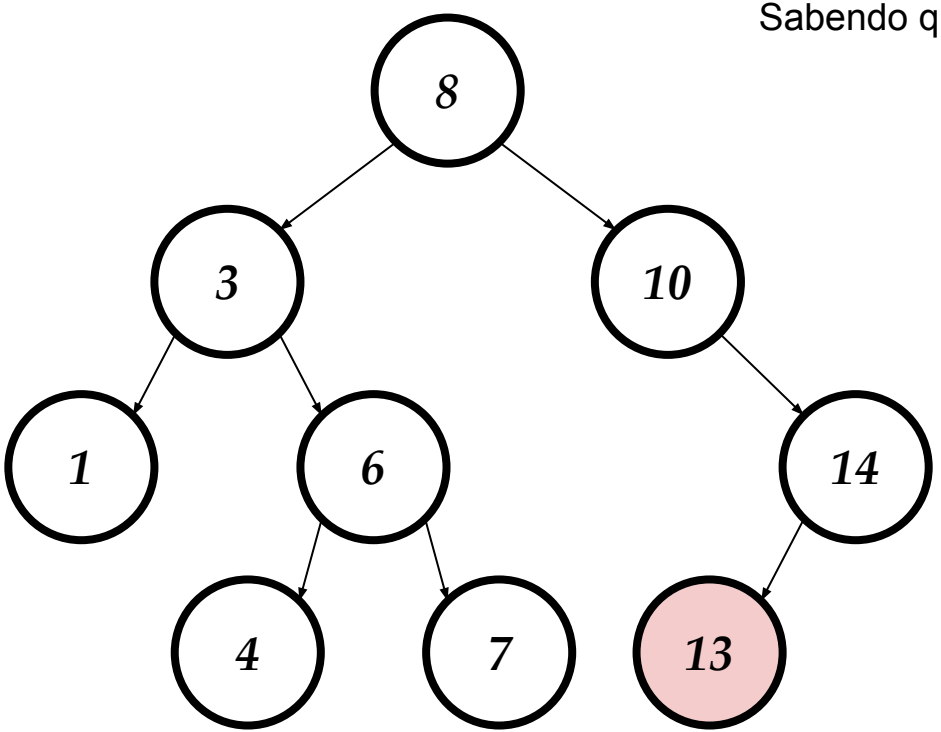
  c. Quando o nó tem 2 descendentes imediatos
     - Vamos deixar 2 sub-árvore órfãs]
     - Precisamos de cuidado para manter a invariante

Removendo Folha

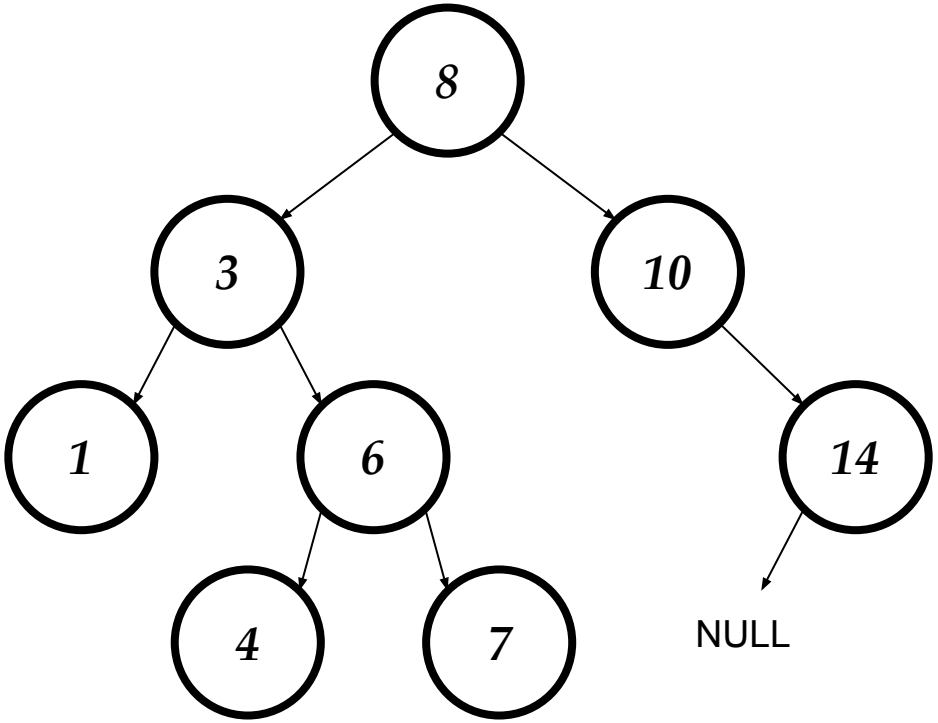


Removendo Folha

Free the node!
Sabendo quem é o pai, faz apontar para NULL

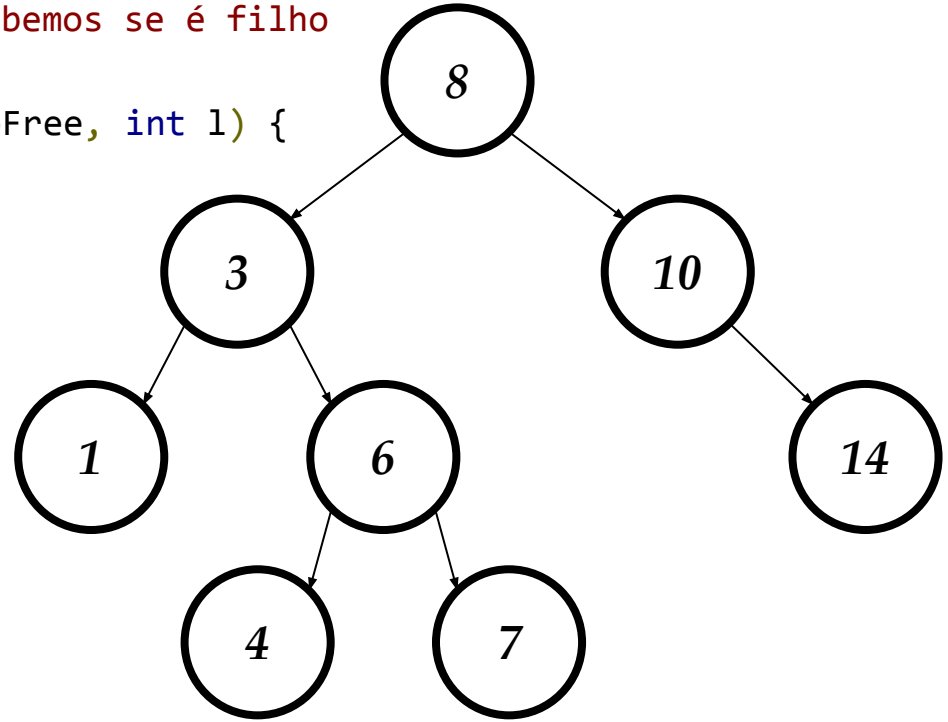


Removendo Folha



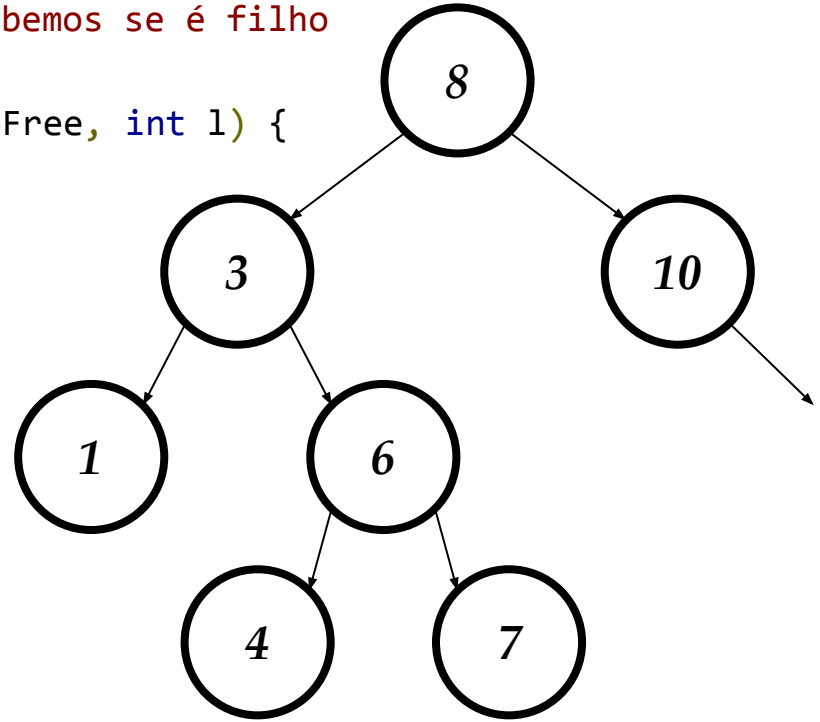
Removendo Folha

```c
//Assumindo que já achamos o nó, o pai e sabemos se é filho
//da esqueda/direita (l).
void removeCaso1(node_t *parent, node_t *toFree, int l) {
  //Caso 1: Apenas Free!
  if (toFree->leftChild == NULL \
      && toFree->rightChild == NULL) {
    free(toFree);
    if (l == 1)
      parent->leftChild = NULL;
    else
      parent->rightChild = NULL;
  }
}
```



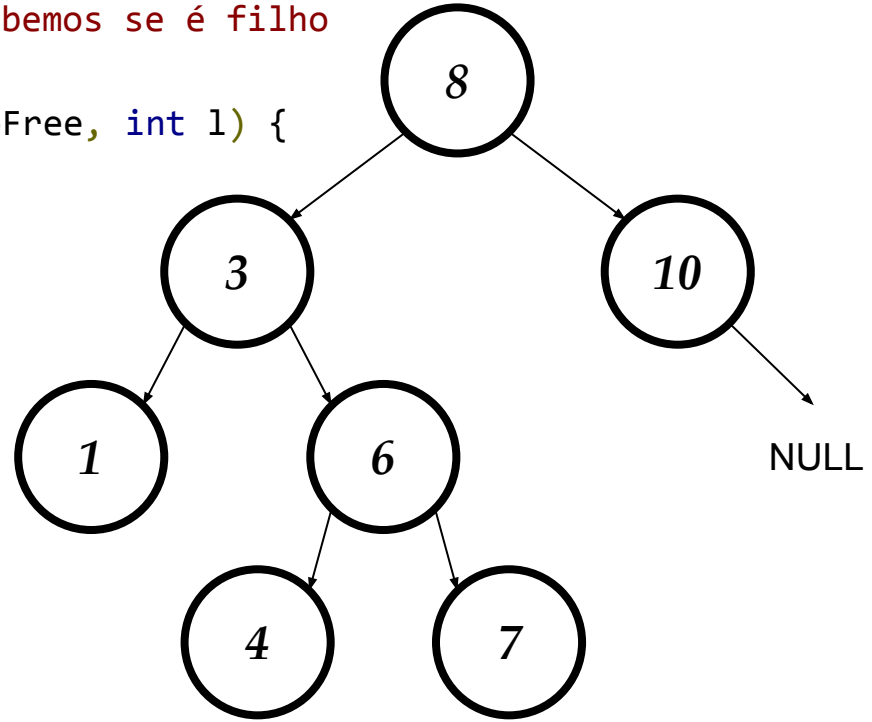
Removendo Folha

```
//Assumindo que já achamos o nó, o pai e sabemos se é filho
//da esqueda/direita (l).
void removeCaso1(node_t *parent, node_t *toFree, int l) {
  //Caso 1: Apenas Free!
  if (toFree->leftChild == NULL \
      && toFree->rightChild == NULL) {
    free(toFree);
    if (l == 1)
      parent->leftChild = NULL;
    else
      parent->rightChild = NULL;
  }
}
```

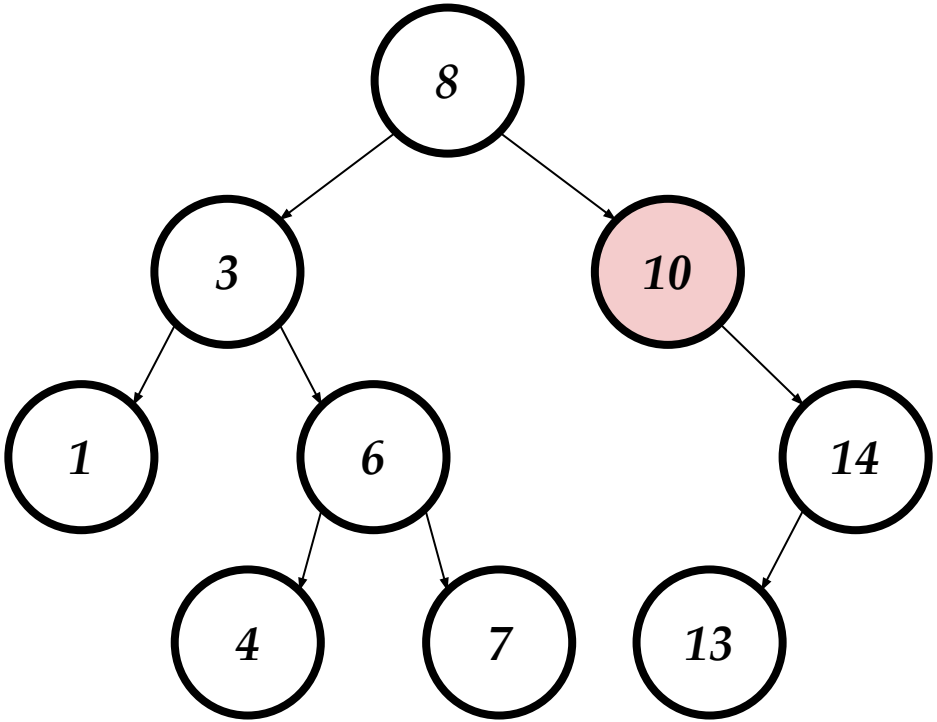


Removendo Folha

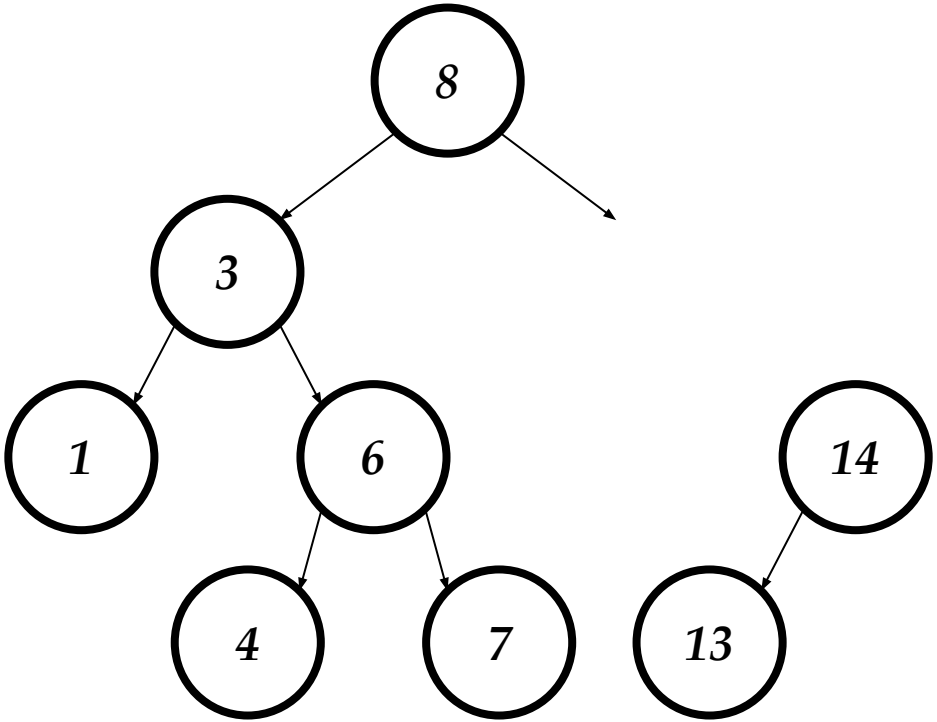
```
//Assumindo que já achamos o nó, o pai e sabemos se é filho
//da esqueda/direita (l).
void removeCaso1(node_t *parent, node_t *toFree, int l) {
  //Caso 1: Apenas Free!
  if (toFree->leftChild == NULL \
      && toFree->rightChild == NULL) {
    free(toFree);
    if (l == 1)
      parent->leftChild = NULL;
    else
      parent->rightChild = NULL;
  }
}
```



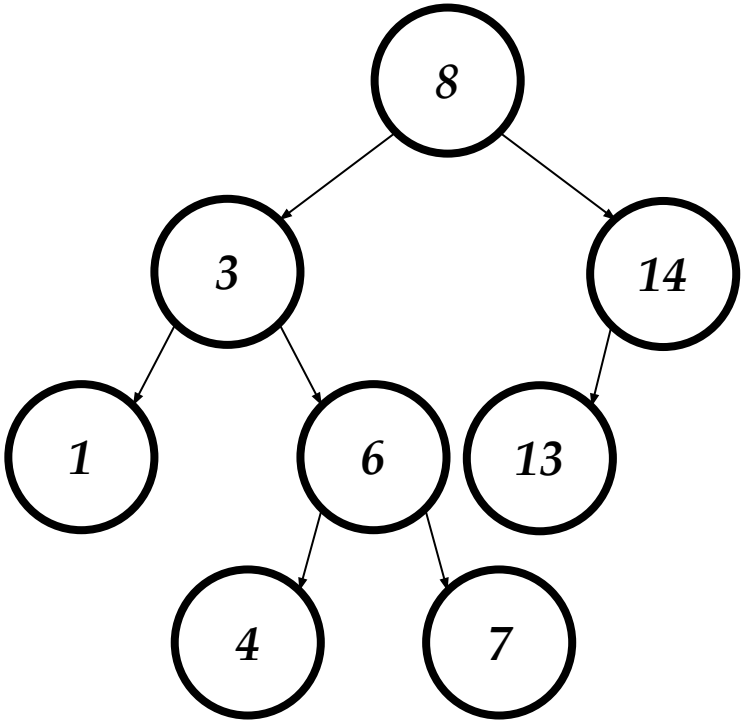
Removendo Com 1 Descendente



Removendo Com 1 Descendente

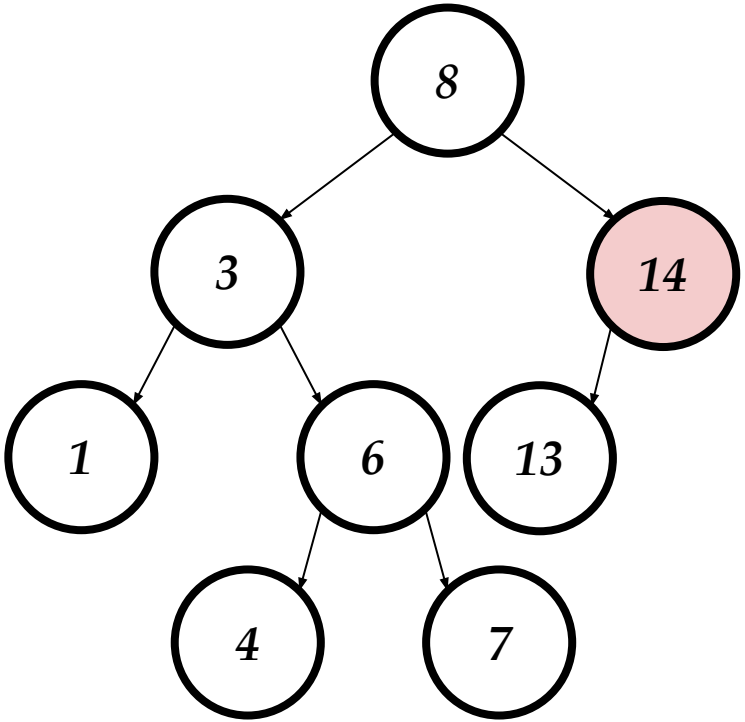


Removendo Com 1 Descendente



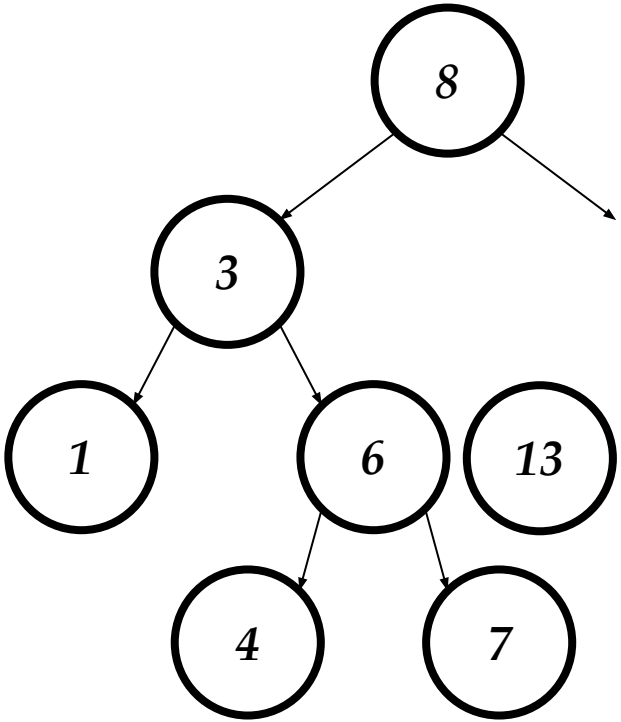
Free!
Herda

Removendo Com 1 Descendente



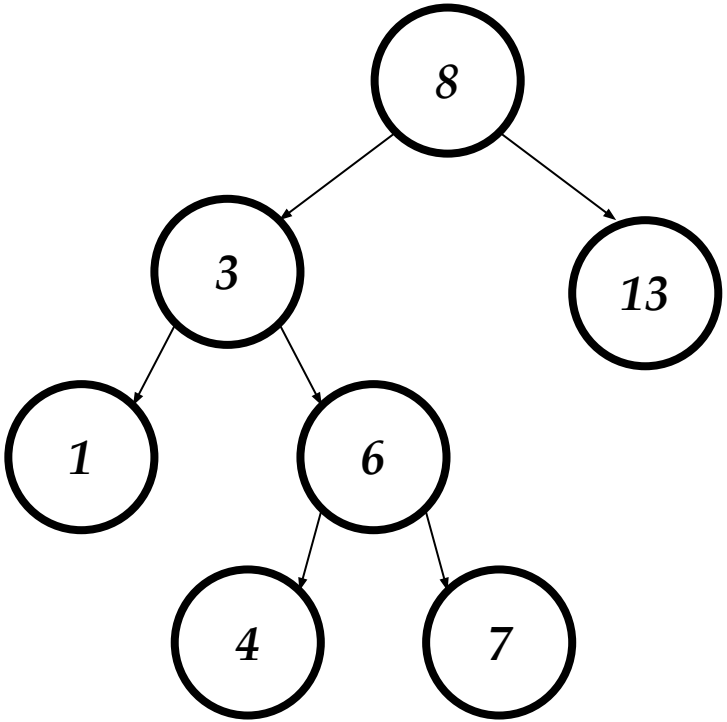
Free!
Herda

Removendo Com 1 Descendente



Free!
Herda

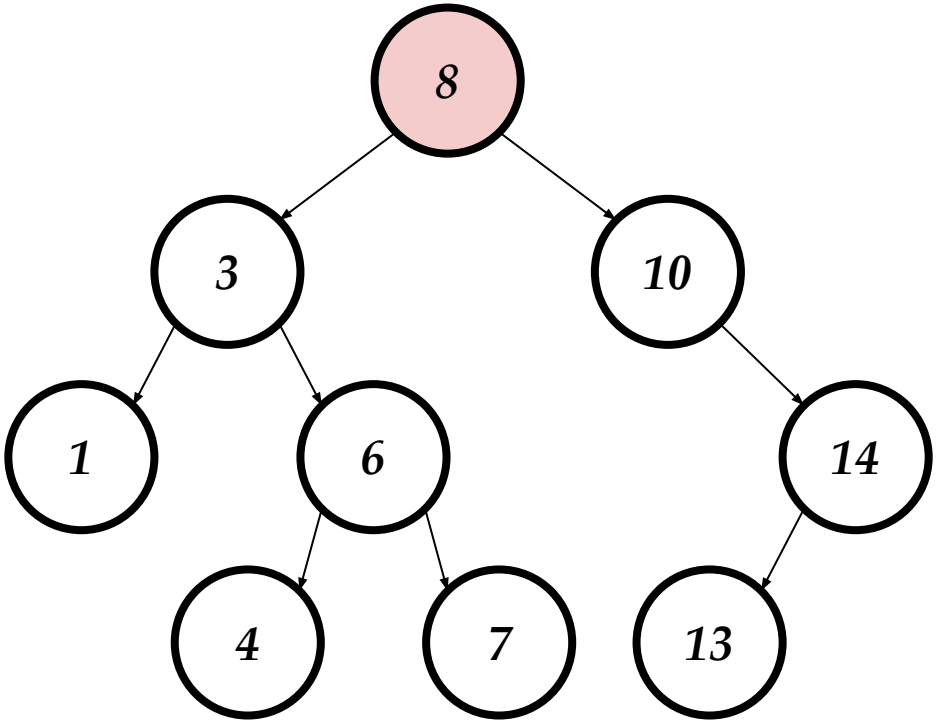
Removendo Com 1 Descendente



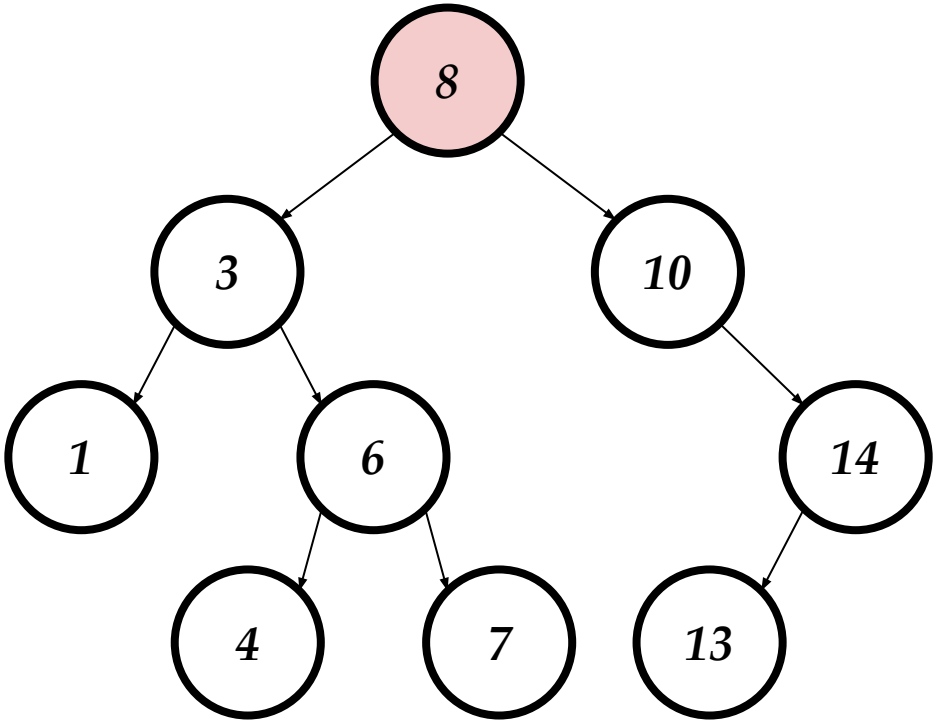
Free!
Herda

```c
//Assumindo que já achamos o nó, o pai e sabemos se é filho
//da esqueda/direita (l).
void removeCaso2(node_t *parent, node_t *toFree, int l) {
  //Caso 2: Quando esquerda é NULL
  if (toFree->leftChild == NULL) {
    if (l == 1)
      parent->leftChild = toFree->rightChild; //Herda nó D
    else
      parent->rightChild = toFree->rightChild;
    free(toFree);
  }
  //Caso 2: Quando direita é NULL
  if (toFree->rightChild == NULL) {
    if (l == 1)
      parent->leftChild = toFree->leftChild; //Herda nó L
    else
      parent->rightChild = toFree->leftChild;
    free(toFree);
  }
}
```

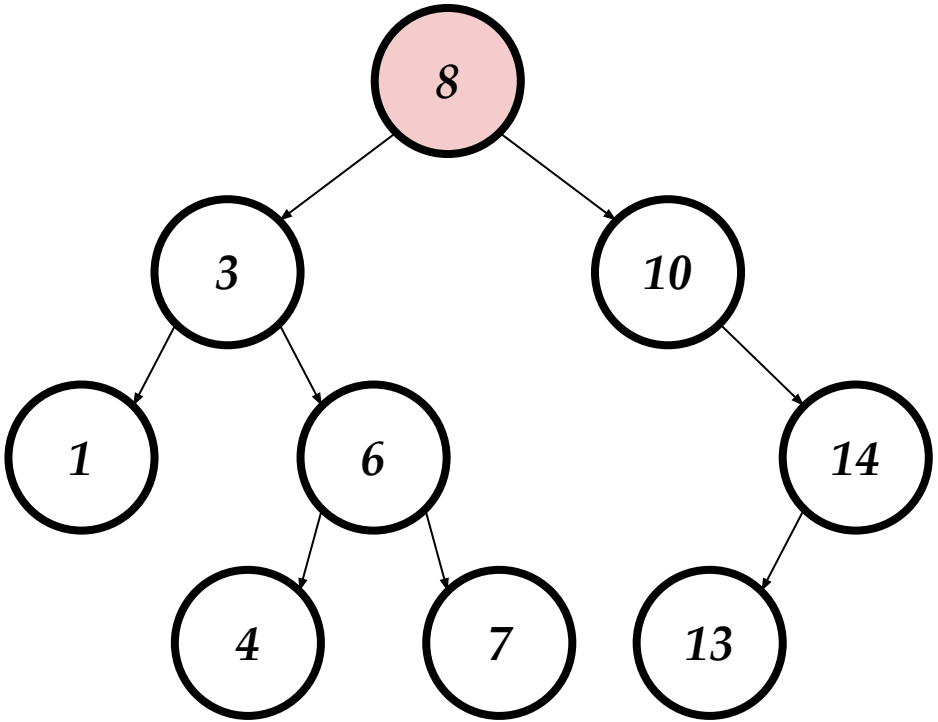
Terceiro Caso



Terceiro Caso: Qual valor pode substituir 8?

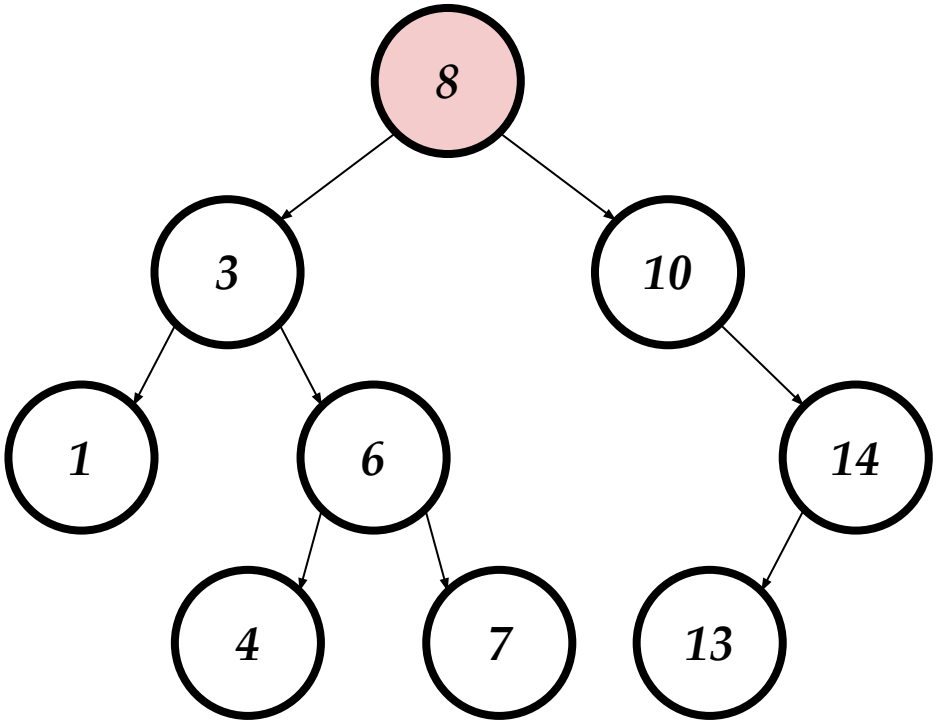


Terceiro Caso: Qual valor pode substituir 8?



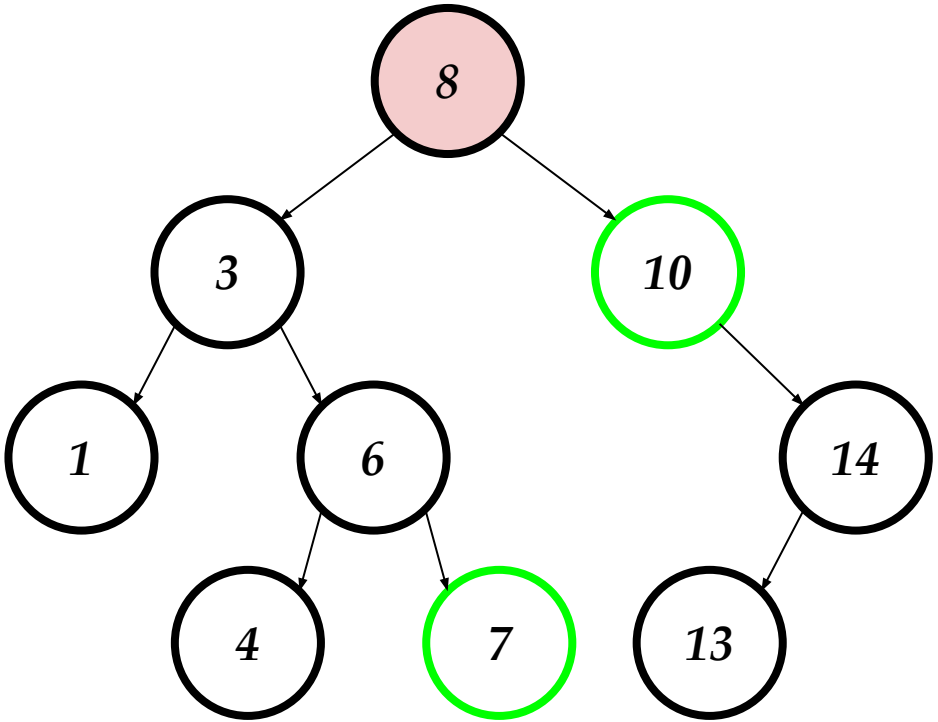
Olhe para os nós de forma ordenadas
1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 13, 14

Terceiro Caso: 7 ou 10



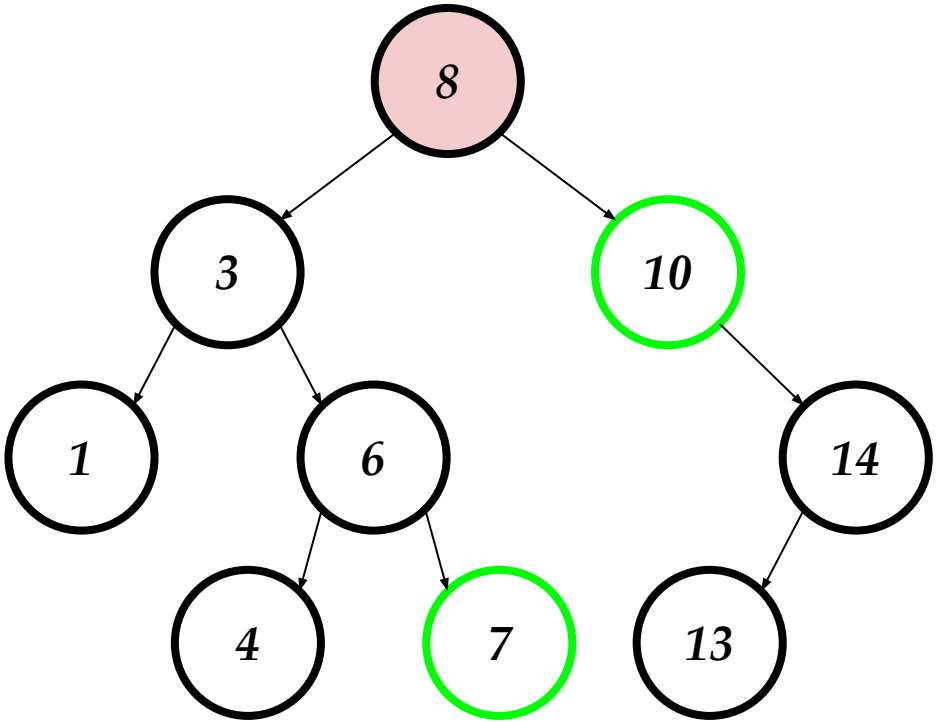
Olhe para os nós de forma ordenadas
1, 3, 4, 6, **7**, 8, **10**, 13, 14

Terceiro Caso: 7 ou 10



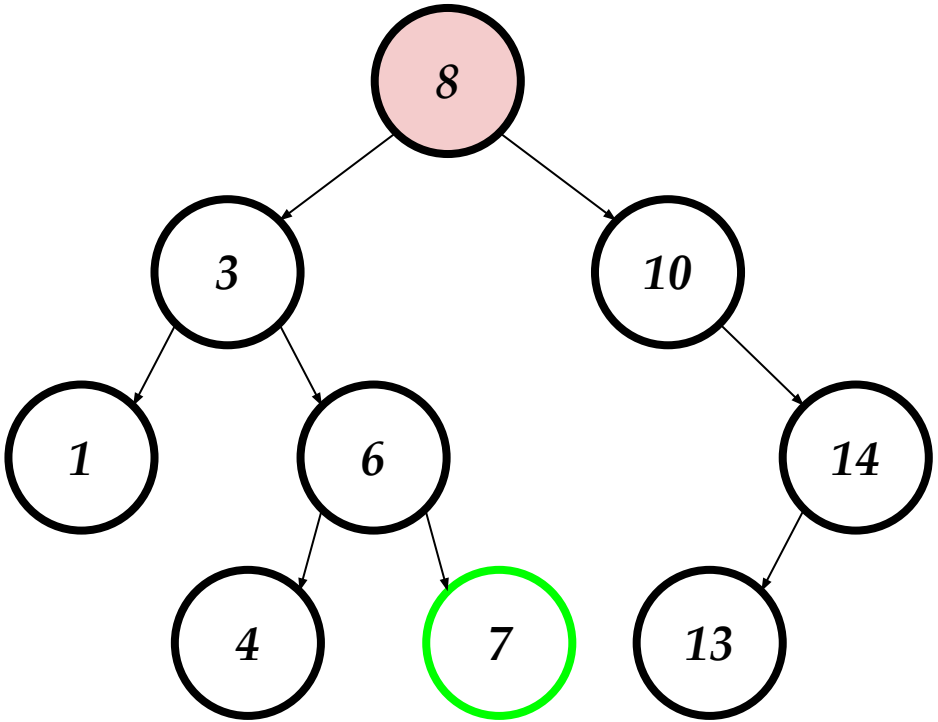
- Os elementos vizinhos quando pensamos em ordem
- Não quebram a invariante
  - 7 é maior do que 3 e menor do que 10
  - 10 é maior do que 3 e menor do que 14
- Como procedemos?

Terceiro Caso: 7 ou 10



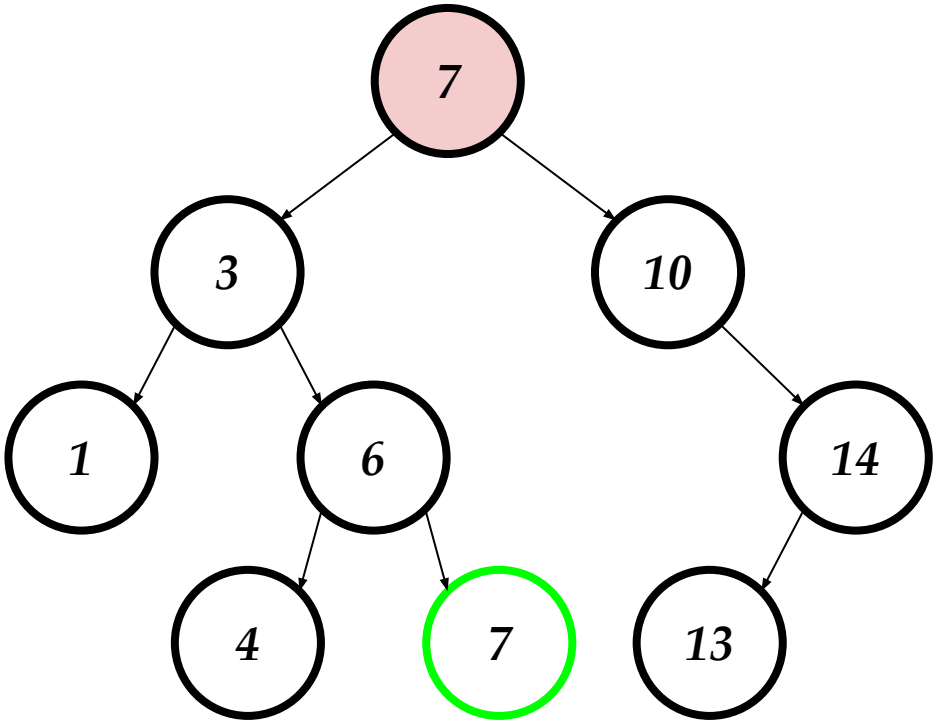
- Os elementos vizinhos quando pensamos em ordem
- Não quebram a invariante
  - 7 é maior do que 3 e menor do que 10
  - 10 é maior do que 3 e menor do que 14
- Como procedemos?
  - Trocar 8 por um deles

Terceiro Caso: Olhando para 7



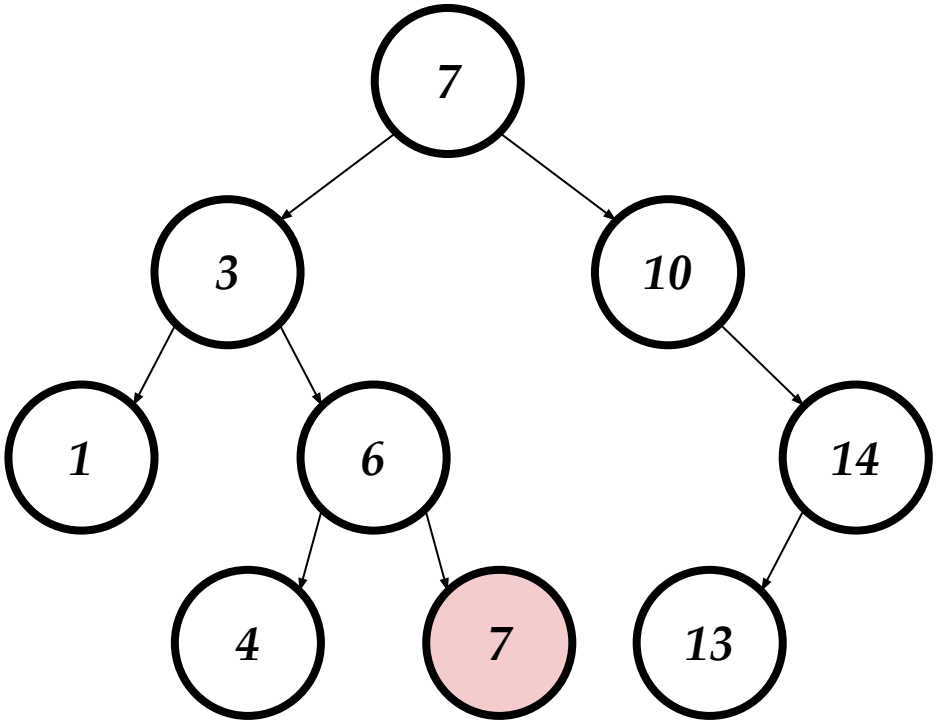
- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**

Terceiro Caso: Olhando para 7



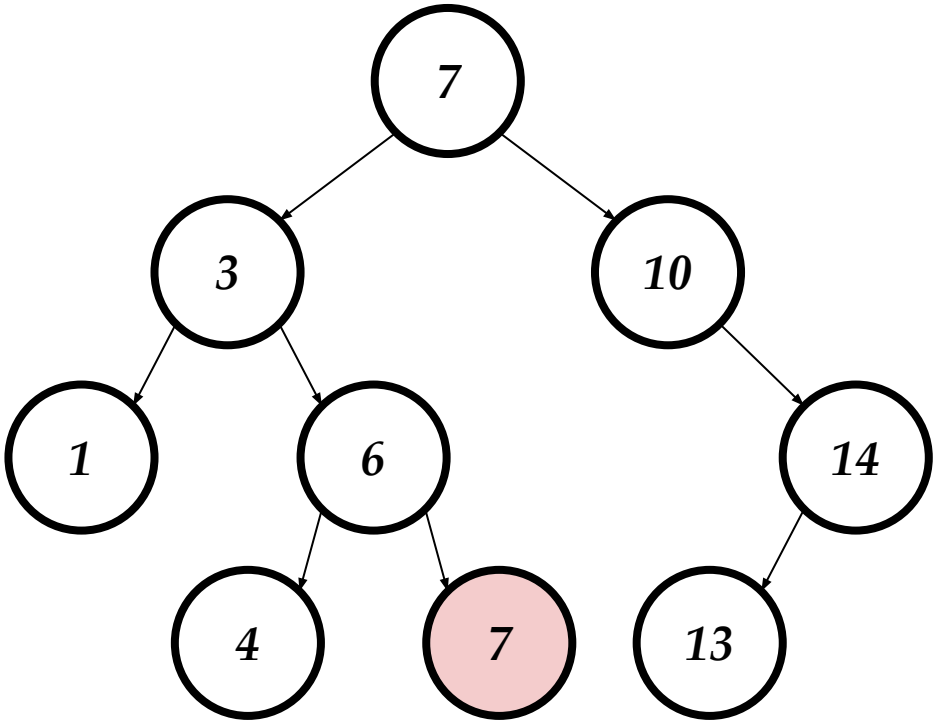
- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**

Terceiro Caso: Olhando para 7



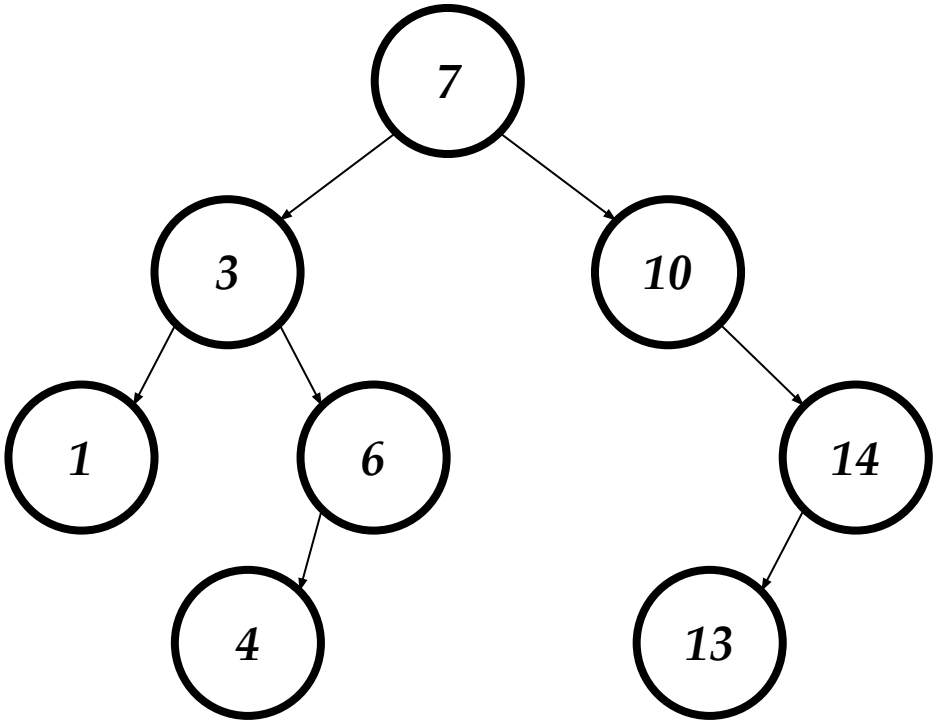
- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**
- Remover o antigo 7

Terceiro Caso: Olhando para 7



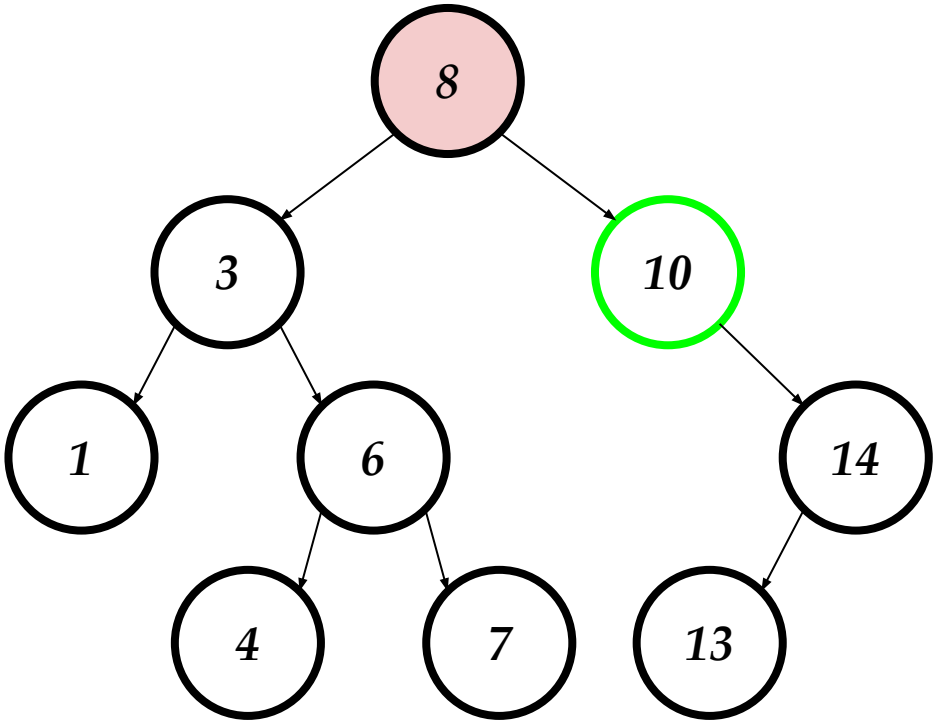
- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**
- Remover o antigo 7
  - Caso 1 sem descendentes

Terceiro Caso: Olhando para 7



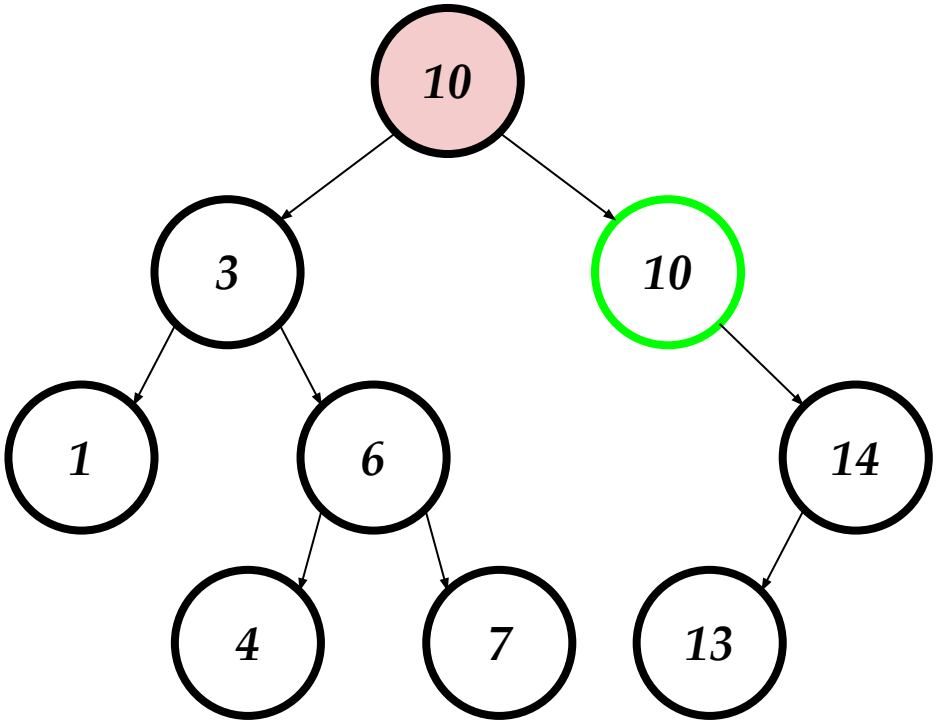
- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**
- Remover o antigo 7
  - Caso 1 sem descendentes
- Fazemos uso da função de remove

Terceiro Caso: Olhando para 10



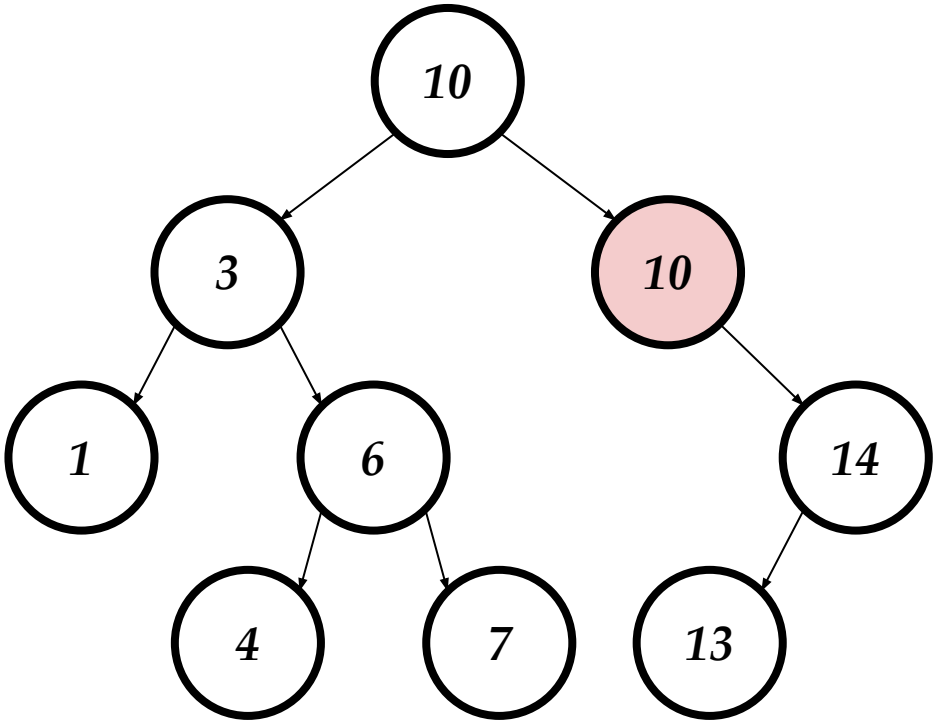
- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**

Terceiro Caso: Olhando para 10



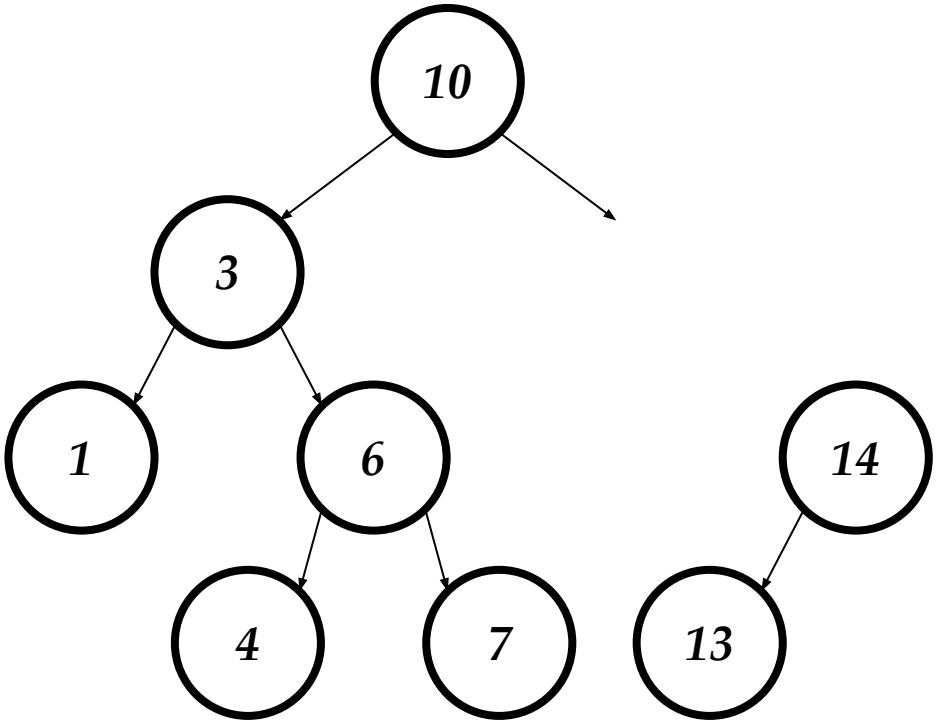
- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**
- Remover 10

Terceiro Caso: Olhando para 10



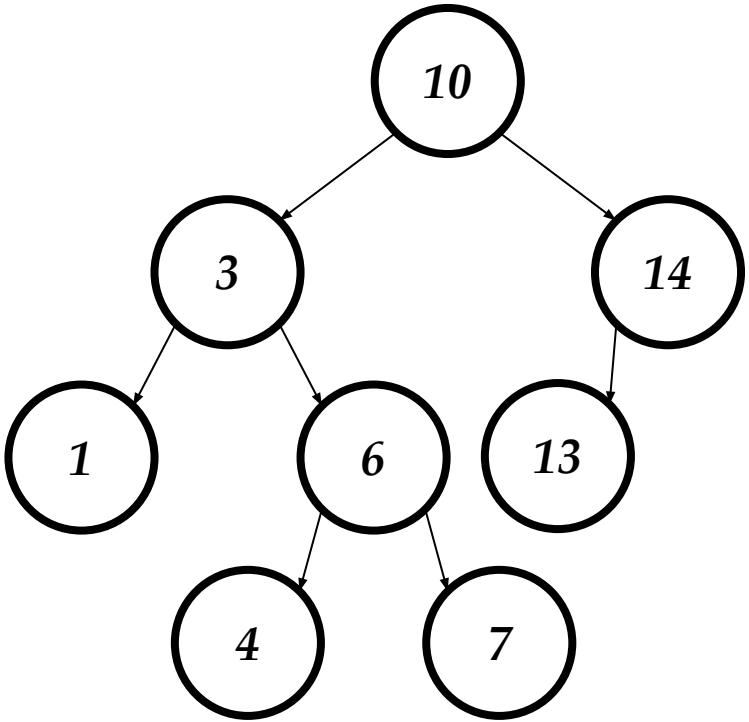
- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**
- Remover 10
  - Caso 2
  - 1 descendente

Terceiro Caso: Olhando para 10



- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**
- Remover 10
  - Caso 2
  - 1 descendente

Terceiro Caso: Olhando para 10



- Trocando 8 com 7
- Vamos trocar o **valor!**
- Remover 10
  - Caso 2
  - 1 descendente

Como achamos o 7 ou 10?

- Menor elemento da árvore
  - Sempre caminhar para esquerda
- Maior elemento da árvore
  - Sempre caminhar para direita
- 7 é o maior elemento entre os menores do que 8
  - 1 passo para direita
  - Acha menor indo para esquerda
- 10 é o menor elemento entre os maiores do que 8
  - 1 passo para esquerda
  - Acha menor indo para direita

Substituímos e fazemos uso do Caso 1 ou 2

```
void removeCaso3(node_t *toFree) {
  node_t *replacement = findMin(toFree->rightChild);
  toFree->value = replacement->value;
  if (toFree->leftChild == NULL && toFree->rightChild == NULL)
    removeCaso1(replacement);
  else
    removeCaso2(replacement);
 }
```

Inserção e Remoção

- Pode ser feito recursivamente ou iterativamente

- Vários pequenos detalhes
  - Cuidar dos NULLs
  - Frees
  - Herança

- Slides mostram a ideia

- Olhar o código exemplo
  - Veja como tem vários ifs, cuidar de tudo
  - Foque no essencial!

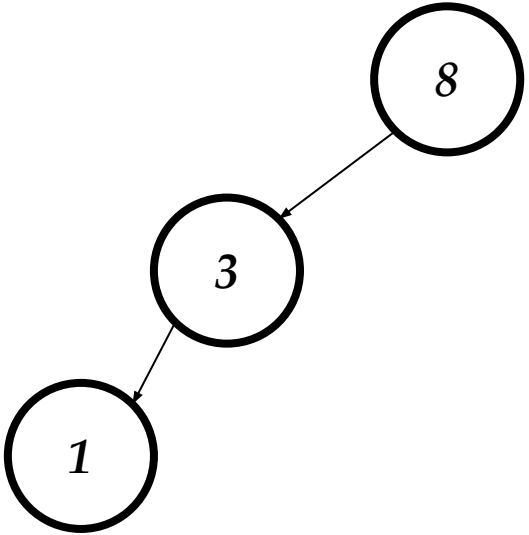
Liberando a Árvore Toda

- Podemos reutilizar todo aquele remove que fizemos
- Free no bst_tree
- Simples!
- Podemos usar caminhamentos também
  - Slides futuros

```
void bstFree(bst_t *tree) {
  while(tree->root != NULL)
     //Caso 1, 2 e 3 dentro de 1 remove
     removeValue(tree, tree->root->value);
  free(tree);
}
```

Pior Caso (inserimos na ordem)

Vira uma lista



Custos

- Inserir?
- Remover?
- Achar valor?

Custos: Pior Caso

- Inserir?
  - O(n)
- Remover?
  - O(n)
- Achar valor?
  - O(n)

Custos: Assumindo que a árvore é balanceada

Elementos inseridos de forma uniforme causam balanceamento na média

- Inserir?
  - O(log n)
- Remover?
  - O(log n)
- Achar valor?
  - O(log n)
- Melhor do que a lista para achar valores
- Podemos garantir que a árvore sempre vai ser balanceada
  - Aulas futuras

Caminhamento: Como imprimir os nós?

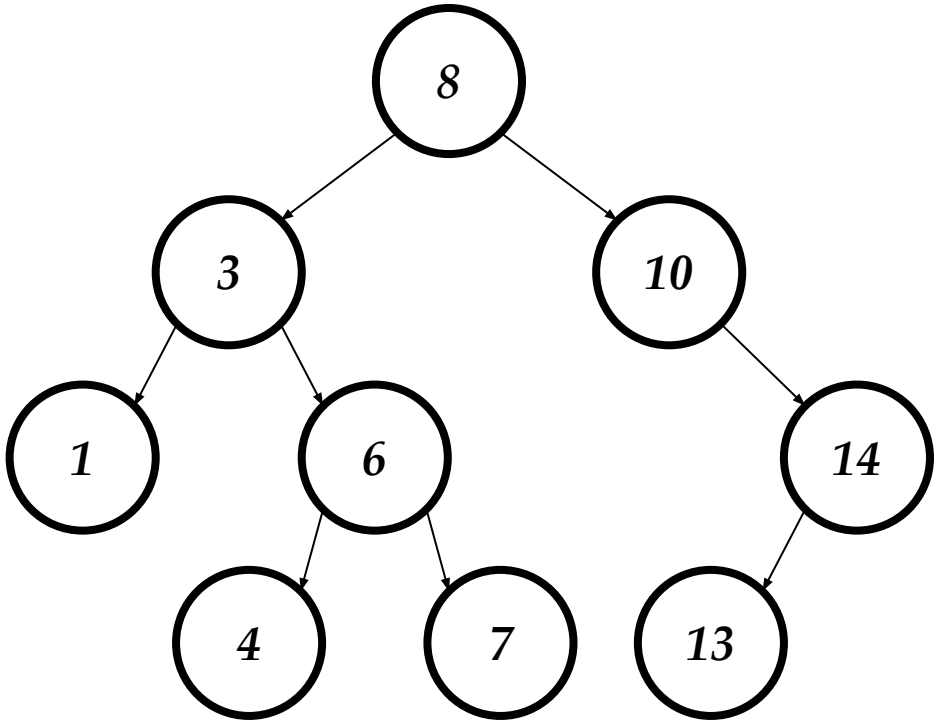
- Diferentes formas de visitar todos os nós

Caminhamento: Como imprimir os nós?

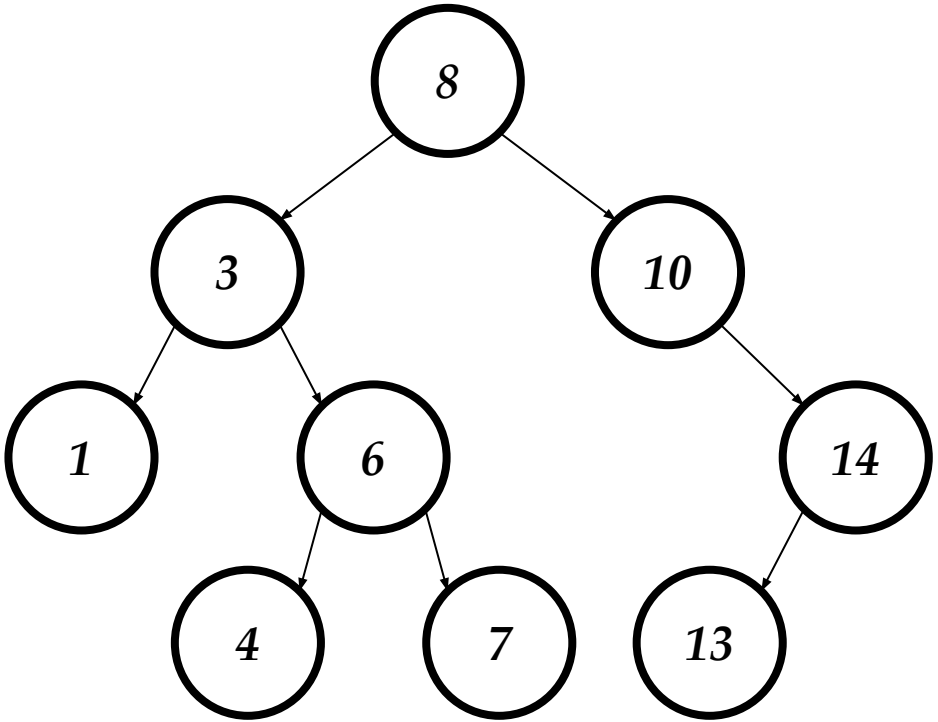
- Diferentes formas de visitar todos os nós

- Central (em ordem, in order)
  - Visitar esquerda
  - Imprimir nó
  - Visitar direita
- Pré ordem (pre order)
  - Imprimir nó
  - Visitar esquerda
  - Visitar direita
- Pós ordem (pre order)
  - Visitar esquerda
  - Visitar direita
  - Imprimir

Em Ordem



Em Ordem: 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 13, 14



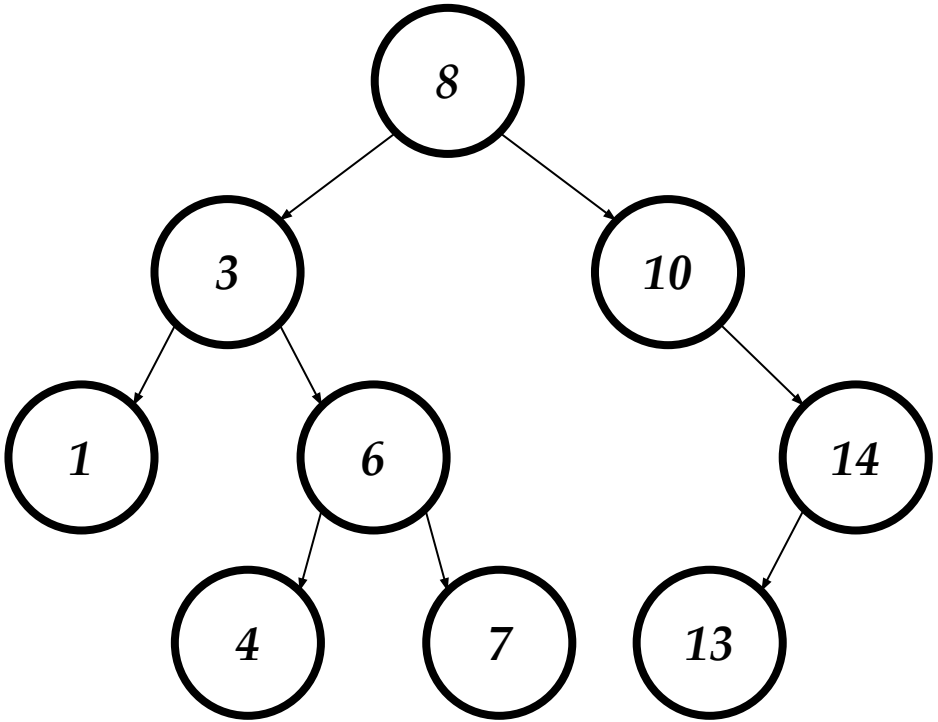

```c
void printInOrder(node_t *node) {
  if (node == NULL) {
    return;
  }
  printInOrder(node->leftChild);
  printf("%d ", node->value);
  printInOrder(node->rightChild);
}
```

Em Ordem

- Essencialmente imprime os nós ordenados

- Como caminhamos para a esquerda até o fim
  - Imprime menor
  - Imprime seguinte
  - ....

Pre Ordem: 8, 3, 1, 6, 4, 7, 10, 14, 13




```c
void printPreOrder(node_t *node) {
  if (node == NULL) {
    return;
  }
  printf("%d ", node->value);
  printPreOrder(node->leftChild);
  printPreOrder(node->rightChild);
}
```

Caminhamento Pré Ordem

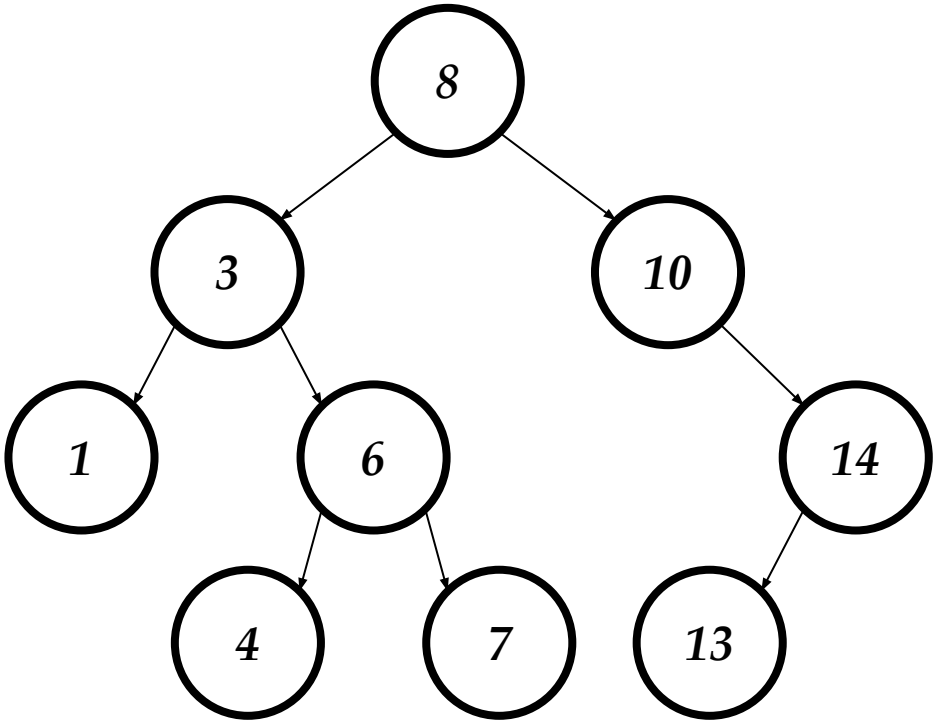
- Pode ser utilizado para duplicar uma árvore

- Como fazer?
  - Cria uma nova árvore
  - Caminha pré ordem
  - Insere os nós (ao invés de print) na novas

- Também pode usado para expressões resolver expressões

```
void duplicate(bst_t *tree, node_t *node) {
  if (node == NULL) {
    return;
  }
  insertValue(tree, node->value);
  duplicate(node->leftChild);
  duplicate(node->rightChild);
}
```

Pos Ordem: 1, 4, 7, 6, 3, 13, 14, 10, 8




```
void printPosOrder(node_t *node) {
  if (node == NULL) {
    return;
  }
  printPosOrder(node->leftChild);
  printPosOrder(node->rightChild);
  printf("%d ", node->value);
}
```

Caminhamento Pós Ordem

- Pode ser utilizado para liberar a árvore
- Sempre estamos com um nó sem descendentes
- Melhor do que o código anterior

```
void bstFree(node_t *node) {
  if (node == NULL) {
    return;
  }
  bstFree(node->leftChild);
  bstFree(node->rightChild);
  free(node);
}
```

Caminhamento

- Qual o custo?

Caminhamento

- Qual o custo?
  - O(n)
  - Visitamos todos os nós

Caminhamento

- Qual o custo?
  - O(n)
  - Visitamos todos os nós
  - Podemos aplicar o teorema mestre também

Teorema Mestre

- $T(n) = a * T(n/b) + f(n)$

- *Se* $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ *para uma constante* $\varepsilon > 0$
  - *temos que* $T(n) = \boldsymbol{\Theta}(n^{\log_b a})$

- *Se* $f(n) = \boldsymbol{\Theta}(n^{\log_b a})$, *ou seja,* $\varepsilon = 0$
  - *temos que* $T(n) = \boldsymbol{\Theta}(n^{\log_b a} \log n)$

- *Se* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a - \varepsilon})$, *com* $\varepsilon > 0$ *e se* $a * f(n/b) \leq c * f(n/b)$, *com* $c < 1$
  - *temos que* $T(n) = \boldsymbol{\Theta}(f(n))$

Teorema Mestre

- $T(n) = 2 * T(n/2) + O(1)$
  $c = 0, \varepsilon = 1$

- *Se* $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ *para uma constante* $\varepsilon > 0$
  - *temos que* $T(n) = \boldsymbol{\Theta}(n^{\log_b a})$
- *Se* $f(n) = \boldsymbol{\Theta}(n^{\log_b a})$, *ou seja,* $\varepsilon = 0$
  - *temos que* $T(n) = \boldsymbol{\Theta}(n^{\log_b a} \log n)$
- *Se* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a - \varepsilon})$, *com* $\varepsilon > 0$ *e se* $a * f(n/b) \leq c * f(n/b)$, *com* $c < 1$
  - *temos que* $T(n) = \boldsymbol{\Theta}(f(n))$

Notas Finais

- Código aqui são pequenos trechos de um código completo de árvore
- Tentem implementar do 0